Огнян Касабов

ПОЧТИ ЕРМИТОВИ МНОГООБРАЗИЯ С НУЛЕВ ТЕНЗОР НА БОХНЕР

София, 2015 г.

ПОЧТИ ЕРМИТОВИ МНОГООБРАЗИЯ
С НУЛЕВ ТЕНЗОР НА БОХНЕР

Монография

Огнян Касабов

Рецензенти: проф. д-р Димитър Мекеров
доц. д-р Георги Ганчев

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

Въведение

Един основен въпрос в класическата диференциална геометрия е този за възможността между две Риманови многообразия да съществува изображение, запазващо ъглите (между съответните линии). Такова изображение наричаме *конформно*. Задачата по естествен път води до разглеждането на едно диференцируемо многообразие M, върху което са дефинирани два метрични тензора g и $\tilde{g}$, свързани с $\tilde{g} = e^{2\sigma}g$, където σ е гладка функция. Като следствие от такава връзка се получава връзка между Римановите свързаности за g и $\tilde{g}$, а оттам - и между тензорите на кривина R и $\widetilde{R}$. Тази връзка между R и $\widetilde{R}$ може да изглежда сложна на пръв поглед, но се оказва, че има един тензор, който се изразява с тензора на кривина и който не се променя при конформното изображение, т.е. е конформна инварианта. Този тензор наричаме тензор на Вайл.

В частност, когато едно Риманово многообразие се изобразява конформно върху локално Евклидово (т.е. плоско) пространство, говорим за *конформно плоско многообразие*. И така, при $\mathrm{dim}M > 3$ условието M да е конформно плоско е еквивалентно с условието да има нулев тензор на Вайл. Ясно е, че този тензор играе основна роля, защото благодарение на него свеждаме въпроса за конформна еквивалентност с плоско многообразие до въпроса за неговото анулиране. При това многообразията с нулев тензор на Вайл съдържат важния клас на пространствата с постоянна секционна кривина (които са допълнително и Айнщайнови). Известни са редица характеристики на многообразията с нулев тензор на Вайл, както и алтернативен подход за неговото дефиниране, с изучаването на пространството на тензорите от тип (0,4) над векторно пространство с дефинитна метрика, имащи същите симетрии, като тензора на кривина на Риманово многообразие (LC-тензори).

Естествен е стремежът да се намери аналог на тензора на Вайл в комплексния случай. Така се появява тензорът на Бохнер, дефиниран (в комплексни локални координати) за Келерови многообразия, като формален аналог на тензора на Вайл при изучаването на топологични инварианти на комплексни многообразия [5]. Много бързо тензорът на Бохнер става обект на изключителен интерес. Намерено е негово представяне в реални локални координати [48] и са доказани редица негови свойства, потвърждаващи аналогията с тензора на Вайл. В частност показва се, че едно

Келерово многообразие е с постоянна холоморфна секционна кривина тогава и само тогава, когато е Айнщайново и с нулев тензор на Бохнер.

Всъщност познавайки представянето на тензора на Бохнер в реални координати или в глобални означения забелязваме, че голяма част от твърденията за него са в сила не само за Келерови многообразия, а по-общо за многообразия, чийто тензор на кривината изпълнява Келеровото тъждество

$$R(x, y, z, u) = R(x, y, Jz, Ju) \ .$$

Такива многообразия са интересни и в много други задачи. Поради това за по-общи почти Ермитови многообразия започва изучаване на отклонението на тензора на кривина от Келеровото тъждество. Постепенно това води покрай другите изследвания и до две обобщения на тензора на Бохнер за почти Ермитови многообразия. Тези тензори са предмет на Втора глава на настоящата работа.

Първо в секция 4 показваме, че за не-Келерови почти Ермитови многообразия не е много полезно изучаването на класическия тензор на Бохнер, защото неговото анулиране води до твърде силното следствие многообразието да е (локално) плоско.

Първото обобщение на тензора на Бохнер за произволно почти Ермитово многообразие е *обобщеният тензор на Бохнер* $B(HR)$ [11]. Исторически той се появи с означението B^*, като тензор от Бохнеров тип, отговарящ на *обобщения тензор на кривината* R^*. По-късно за последния се предложи означението HR, напомнящо, че той е проекцията на тензора на кривина при холоморфния оператор [15]. В секция 5 привеждаме дефиницията на тези тензори. Представяме някои характеристики на обобщения тензор на Бохнер, които са естествени обобщения на резултати от Келеровата геометрия и аналози на съответни резултати от Римановата геометрия. Освен това доказваме, че ако произведението на две почти Ермитови многообразия M_1 и M_2 е с нулев обобщен тензор на Бохнер, то M_1 и M_2 са с точково постоянни холоморфни секционни кривини μ и $(-\mu)$, съответно – резултат, който ще ни е необходим нататък.

Разглежданията, свързани с тензора на кривина при Риманови многообразия, имат отношение към поведението на последния над двумерните подпространства (които за краткост наричаме площадки) на допирателните пространства.

За почти Ермитови, в частност за Келерови многообразия, налагането на ограничения върху всички площадки не отчита почти комплексната структура и на практика дава много тесен кръг от разглеждани обекти. Естествено е да се разглеждат само някои площадки, като те да са свързани по някакъв начин с почти комплексната структура. Такива видове площадки се определят по следния начин.

За всяка площадка α в допирателно пространство е определен ъгълът θ между нея и образа ѝ при почти комплексната структура: $\theta = \sphericalangle(\alpha, J\alpha),\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Има два забележителни вида площадки: *холоморфни*, характеризирани с условието $\theta = 0$, т.е. $\alpha = J\alpha$ и *антихоломорфни*, характеризирани с изискването $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha \perp J\alpha$. Поради условието $\alpha \perp J\alpha$ антихоломорфните площадки се наричат още *напълно реални*. По-общо една площадка α се нарича θ-холоморфна, ако ъгълът между нея и $J\alpha$ е равен на θ.

Оказва се, че налагането на условия върху θ-холоморфните площадки за $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ също води до твърде силни ограничения за многообразието, както се вижда например от някои резултати от [27] и [47].

Обобщеният (както и класическият – за Келерови многообразия) тензор на Бохнер има пряко отношение към холоморфните площадки. Неговото анулиране обаче не дава добра представа за кривините, освен за холоморфните. Това изглежда естествено поради факта, че холоморфните площадки не зависят от метричния тензор, така че връзката между него и почти комплексната структура се губи при прехода от Келерово към произволно почти Ермитово многообразие. Второто обобщение на тензора на Бохнер, което представяме, е на Тричери и Ванхеке [50].

След въвеждане на тензора $B(R)$ на Бохнер-Тричери-Ванхеке, в секция 6 доказваме теореми относно характеризиране на многообразията с $B(R) = 0$ с условия за тензора на кривина върху антихоломорфни подпространства. Считаме тези теореми особено важни, защото макар въвеждането на $B(R)$ да не е формално, все пак то не показва геометричния смисъл на въведения тензор. От друга страна тези теореми, показващи тясната връзка на $B(R)$ с поведението на тензора на кривина върху антихоломорфни допирателни пространства, са аналози на съответните резултати от Римановата геометрия за тензора на Вайл.

Тъй като, както казахме, $B(R)$ има отношение към антихоломорфните площадки, а те за разлика от холоморфните отчитат връзката между метричния тензор и почти комплексната структура, естествено е да очакваме, че неговото анулиране ще води до анулиране и на $B(HR)$. Така се и оказва и в следващата секция коментираме точната връзка между тези две обобщения.

Доколкото нямаме точен геометричен смисъл на тензора на Бохнер (за разлика от този на Вайл), важно е да знаем какви са многообразията, за които той се анулира. В тази връзка в [40] се прави класификация на Келеровите многообразия с нулев тензор на Бохнер и постоянна скаларна кривина. При това условието за постоянна скаларна кривина е съществено, както може да се види от примерите, дадени в [49].

В секции 8 и 9 разглеждаме въпроси, аналогични на горната теорема от [40] за два основни класа почти Ермитови многообразия – тези на приблизително Келеровите и почти Келеровите многообразия с размерност $2n$, $n > 2$. Специално за AK_3-многообразията доказваме, че съответните аналогични условия влекат, че многообразието е Келерово. За приблизително Келеровия случай се оказва още една възможност – многообразието да е 6-мерната сфера. Забележително е, че за не-Келерови приблизително Келерови многообразия не се налага да изискваме скаларната кривина да е постоянна.

Както казахме, конформно плоските многообразия имат за основен подклас този на многообразията с (точково) постоянна секционна кривина. Двата основни проблема, свързани с последните многообразия са: дали тази кривина е глобална константа и проблемът за тяхното класифициране. На първия от тези въпроси положителен отговор дава класическата теорема на Шур. По втория въпрос се доказва, че многообразието е (локално) плоско или изометрично на сфера или реално хиперболично пространство. В тази връзка са разглежданията в Трета глава за най-важния според нас подклас на многообразията с нулев тензор на Бохнер-Тричери-Ванхеке, този на многообразията с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина.

Различните аналози на теоремата на Шур имат особено значение в диференциалната геометрия. При свързани Келерови многообразия естественият аналог изглежда така: ако във всяка точка кривината на холоморфните допирателни площадки не зависи от тези площадки, тя е глобална константа [37]. За по-общите класове почти Ермитови многообразия обаче, както казахме, холоморфните площадки не носят достатъчна информация за многообразието. Съответна теорема е доказана и за приблизително Келерови многообразия в [41], но с построяването на контрапример в [26] е показано, че теоремата на Шур от холоморфен тип не е вярна за класа на Ермитовите многообразия. Всъщност всяка от построените в [26] Ермитови метрики е не само с точково постоянна холоморфна секционна кривина, но е и конформно плоска.

От друга страна за Келерови многообразия условията за постоянна холоморфна и постоянна антихоломорфна секционна кривина са еквивалентни [7], така че за тях е в сила и теорема на Шур от „антихоломорфен тип“. За приблизително Келерови многообразия теоремата на Шур от антихоломорфен тип доказахме в [16], където получихме и съответна класификационна теорема. За AH_3-многообразия въпроса решихме положително в [27]. В секция 10 разглеждаме произволни свързани почти Ермитови многообразия с размерност $2n$, $n > 2$, и доказваме за тях теоремата на Шур от антихоломорфен тип. Естествено е да се запитаме дали последната теорема е вярна и за 4-мерни почти Ермитови многообразия. Затова в края на секцията привеждаме примери от [44] на 4-мерни Ермитови (дори W_4)-многообразия с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина, която не е глобална константа. При това в единия пример многообразието допълнително е конформно плоско.

При наличието на теорема на Шур следва да се изучи задачата за класифициране на съответните многообразия. В секция 11 показваме, че при размерност $2n$, $n > 2$, всяко свързано AH_3-многообразие с постоянна антихоломорфна секционна кривина е реална или комплексна пространствена форма. Получени са съответни резултати и за основни класове по класификацията на Грей-Хервела. За приблизително Келерови многообразия доказахме класификационна теорема в [16], но в този труд тя е изведена в секция 8 като Следствие 8.4. В секция 12 доказваме, че при $n > 3$ не съществуват същински почти Келерови многообразия с постоянна антихоломорфна секционна кривина. Аналогичния проблем за Ермитови многообразия решаваме в секция 13, където показваме, че при $n > 2$ многообразието отново (както при AH_3-многообразията) трябва да е реална или комплексна пространствена форма. Разбира се, интересно е дали съществуват Ермитови многообразия с ненулева постоянна секционна кривина и след класификационната теорема привеждаме такъв пример, получен в [44]. Обаче ако поискаме многообразието да е компактно, то се оказва плоско, както доказваме в края на секцията.

Резултатите за почти Ермитови многообразия с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина дават голяма надежда да се покаже в бъдеще, че при размерност $2n$, $n > 2$, тези многообразия са реални или комплексни пространствени форми. Наистина, съгласно Теорема 11.1 това е вярно за AH_3-многообразия, а съгласно Следствие 8.4, Теореми 12.5 и 13.5 - за приблизително Келеровите, почти Келеровите (при $n > 3$) и Ермитовите многообразия, т.е. за класовете, отговарящи на W_1, W_2 и $W_3 \oplus W_4$ съгласно класификацията на Грей-Хервела.

Навсякъде в изложението изучаваните обекти (многообразия, тензорни и векторни полета) са безкрайно гладки. Разглежданията са чисто локални, като на места от резултатите в точка на многообразието се правят заключения за достатъчно малка околност на точката.

Размерността на всяко почти Ермитово многообразие е четна, а в работата почти навсякъде се предполага, че тя е по-голяма от 4. Това до голяма степен улеснява използването на специални базиси в допирателните пространства, което, комбинирано с използване на второто тъждество на Бианки, е характерна особеност на един многократно прилаган в работата метод, използван и в някои статии на автора. На други места добре познати методи се адаптират за конкретния случай. Да отбележим, че при малки размерности често има особености при разглежданите обекти. Така тензорът на Бохнер за Ермитово многообразие с размерност 4 се оказва анти-автодуалната компонента на тензора на Вайл [50].

Повечето твърдения, доказани в тази монография са наши. Следствия 6.6 и 6.7 и еквивалентността на условия а) и б) в Теорема 6.8, са на Ганчев [14], [15], но счетохме за уместно да ги включим за цялостно изграждане на картината. Основният резултат в секция 7, Теорема 7.1, е получен в статията на Ганчев [14], а доказателството на Теорема 7.2 е инспирирано това на Теорема 1 от [13] за Келеровия случай.

Авторът се надява, че точно е предал голяма част от развитието на идеите за тензори на Бохнер над почти Ермитови многообразия и най-вече българския принос при дефинирането им и изучаването на свързаната с тях теория.

Авторът благодари на рецензентите за полезните препоръки и предложения за корекции, които подобриха този труд. Специални благодарности авторът изказва на Георги Ганчев за всичко научено през последните 35 години.

ПЪРВА ГЛАВА

ПРЕДВАРИТЕЛНИ СВЕДЕНИЯ.

1 Риманово многообразие. Тензор на Вайл

Нека M е n-мерно диференцируемо многообразие, с което е асоцииран метричен тензор g. Навсякъде ще предполагаме, че метричният тензор g е положително определен, въпреки че голяма част от резултатите са в сила и за индефинитния случай. Тогава двойката (M, g) или накратко M се нарича *Риманово многообразие*. Допирателното пространство в точка p на M ще отбелязваме с T_pM, алгебрата на гладките функции над M – с $\mathfrak{F}(M)$, а алгебрата на гладките векторни полета – с $\mathfrak{X}(M)$.

Едно изображение

$$\nabla \ : \qquad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ \longrightarrow \ \mathfrak{X}(M)$$

се нарича *линейна свързаност*, ако има свойствата

$$\begin{aligned}
&\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \, , \\
&\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \, , \\
&\nabla_X(fY) = Xf.Y + f\nabla_X Y \, , \\
&\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y
\end{aligned}$$

за $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$. Една линейна свързаност ∇ наричаме *симетрична*, ако торзията ѝ е нула:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \, .$$

Свързаност ∇, спрямо която метричният тензор е паралелен:

$$\nabla g = 0 \, , \qquad \text{т. е.} \qquad Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \, ,$$

наричаме *метрична*.

Известно е [36], че всяко Риманово многообразие притежава единствена симетрична метрична линейна свързаност. Тя се нарича *Римановата свързаност* или *свързаност на Леви-Чивита*. Навсякъде нататък ще работим с Римановата свързаност за съответното Риманово многообразие.

Тензорът на кривината R от тип (1,3) се дефинира с

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

за X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$, където $[X,Y]$ е комутаторът на векторните полета X, Y. Съответният тензор на кривина от тип (0,4) (който отбелязваме също с R) се дефинира с

$$R(X,Y,Z,U) = g(R(X,Y)Z,U) \ .$$

Тензорът на кривина има следните свойства:

1) $R(x,y,z,u) = -R(y,x,z,u)$;
2) $R(x,y,z,u) + R(y,z,x,u) + R(z,x,y,u) = 0$ (първо тъждество на Бианки);
3) $R(x,y,z,u) = -R(x,y,u,z)$;
4) $R(x,y,z,u) = R(z,u,x,y)$

за произволни $x,y,z,u \in T_p, M, \ p \in M$. Многократно ще използваме още следното свойство на R, което се нарича *второ тъждество на Бианки*:

$$(\nabla_x R)(y,z,u,v) + (\nabla_y R)(z,x,u,v) + (\nabla_z R)(x,y,u,v) = 0 \ . \tag{1.1}$$

Нека α е двумерно подпространство (площадка) на T_pM с базис $\{x,y\}$. *Секционна кривина* или само *кривина* на α наричаме числото

$$K(\alpha,p) = \frac{R(x,y,y,x)}{g(x,x)g(y,y) - g^2(x,y)} \ .$$

Поради свойствата $1) - 4)$ на R това число не зависи от базиса $\{x,y\}$ на α. Когато векторите x,y са единични и взаимно ортогонални, означаваме

$$K(x,y) = K(\alpha,p) = R(x,y,y,x) \ .$$

Казваме, че многообразието M е с *точково постоянна секционна кривина*, ако за всяка точка p кривината на произволна площадка α в T_pM не зависи от α, т.е. е функция само на точката p: $K(\alpha,p) = c(p)$. В този случай от свойствата $1) - 4)$ следва, че тензорът на кривина има вида

$$R(x,y,z,u) = c(p)\big(g(x,u)g(y,z) - g(x,z)g(y,u)\big) \ . \tag{1.2}$$

Тъй като тензорът в дясната страна на горното равенство ще играе важна роля нататък и ще се среща много пъти в изложението, ще използваме за него широко разпространеното означение

$$\pi_1(x, y, z, u) = g(x, u)g(y, z) - g(x, z)g(y, u) \ .$$

С помощта на второто тъждество на Бианки (1.1) се доказва следната класическа теорема на Шур [36]:

Теорема 1.1. *Ако $n \geq 3$, а M е свързано и с точково постоянна секционна кривина $c(p)$, то функцията $c(p)$ не зависи и от точката p, т.е. тя е глобална константа.*

Всеки две свързани, едносвързани и пълни Риманови многообразия с постоянна секционна кривина са изометрични [36]. Основни примери на Риманови многообразия с постоянна секционна кривина са n-мерното Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (с нулева кривина), n-мерната сфера $\mathbb{S}^n(c)$ (с положителна кривина c) и n-мерното хиперболично пространство $\mathbb{D}^n(c)$ (с отрицателна кривина c).

Друг основен тензор в теорията на Римановите многообразия е тензорът на Риччи S, дефиниран с

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^{n} R(x, e_i, e_i, y)$$

за $x, y \in T_pM$, където $\{e_1, ..., e_n\}$ е ортонормирана база на T_pM. Лесно се проверява, с използване на свойствата $1) - 4)$ на R, че тензорът на Риччи е симетричен. Често тензор на Риччи се нарича и съответният тензор S от тип (1,1) спрямо метричния тензор g, дефиниран с

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} R(x, e_i)e_i$$

или $g(S(x), y) = S(x, y)$. Функцията

$$\tau(p) = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

се нарича *скаларна кривина на M*. Многообразието се нарича *Айнщайново*, когато тензорът на Риччи е пропорционален на метричния тензор: $S = \lambda g$. Пак от второто тъждество на Бианки следва, че в този случай λ е константа (при $n \geq 3$). Всъщност за функцията λ лесно следва $\lambda = \tau/n$, така че всяко Айнщайново многообразие е с постоянна скаларна кривина. От друга страна всяко пространство с постоянна секционна кривина е Айнщайново, както лесно следва от (1.2).

Друг основен тензор в Римановата геометрия, който е от значение за нашето изложение, е този на Вайл. Той се появява естествено при конформно изображение между две Риманови многообразия, или все едно при разглеждане на едно диференцируемо многообразие M, с два метрични тензора g и $\tilde{g}$, свързани с

$$\tilde{g}(x,y) = e^{2\sigma} g(x,y) \ ,$$

където $\sigma \in \mathfrak{F}(M)$. В този случай казваме, че е зададена *конформна смяна* на метриката. Тези изображения са особено важни, защото запазват ъглите между съответните вектори, а оттук и ъглите между съответните линии. Да означим с $\widetilde{\nabla}$ Римановата свързаност за $\tilde{g}$. Тогава

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X\sigma Y + Y\sigma X - g(X,Y)\nabla\sigma$$

за $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, където $\nabla\sigma$ е градиентът на σ. Оттук следва, че тензорите на кривина R и $\widetilde{R}$ за g и $\tilde{g}$ са свързани с

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(x,y,z,u) = e^{2\sigma}\big\{R(x,y,z,u) \ &+ \ g(x,u)P(y,z) - g(x,z)P(y,u) \\ &+ \ g(y,z)P(x,u) - g(y,u)P(x,z)\big\} \ , \end{aligned} \tag{1.3}$$

където

$$P(x,y) = x(\sigma)y(\sigma) - g(\nabla_x \nabla\sigma, y) - \frac{1}{2} \parallel \nabla\sigma \parallel^2 g(x,y) \ .$$

При $n > 2$ да положим

$$C = R - \frac{1}{n-2}\varphi(S) + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\pi_1 \ , \tag{1.4}$$

където

$$\begin{aligned} \varphi(Q)(x,y,z,u) \ &= g(x,u)Q(y,z) - g(x,z)Q(y,u) \\ &+ g(y,z)Q(x,u) - g(y,u)Q(x,z) \end{aligned}$$

за произволен тензор Q от тип (0,2) и да означим с $\widetilde{C}$ съответния тензор за $\tilde{g}$. От (1.3) лесно се получава

$$\widetilde{C}(x,y,z,u) = e^{2\sigma}C(x,y,z,u) \ . \tag{1.5}$$

Тензорът C (съотв. $\widetilde{C}$) се нарича тензор на Вайл за g (съотв. за $\tilde{g}$). Равенство (1.5) означава, че тензорът на Вайл от тип (1,3) е конформно инвариантен. Да обърнем внимание, че $\pi_1 = 1/2\,\varphi(g)$ както и че

$$\sum_{i=1}^{n} C(x, e_i, e_i, y) = 0 \ , \tag{1.6}$$

т.е. тензорът на Ричи за C е тъждествено нула.

Многообразието (M, g) се нарича *конформно плоско*, когато съществува конформна смяна, така че $(M, \tilde{g})$ да е плоско, т.е $\widetilde{R}$ да е тъждествено нулевият тензор. В този случай от (1.4) и (1.5) следва

$$R = \frac{1}{n-2}\varphi(S) - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\pi_1 \ , \tag{1.7}$$

т.е. тензорът на Вайл за (M, g) е нула. Особено важно е че обратно, когато $n > 3$ и тензорът на кривина на M изпълнява (1.7), т.е. когато тензорът на Вайл за M е тъждествено нула, многообразието M е конформно плоско [1].

Оттук е ясно, че при $n > 3$ тензорът на Вайл има забележителен геометричен смисъл и ни дава един (при това много удобен) критерий за това, дали многообразието е конформно плоско. Все пак към геометричната характеристика на този тензор можем да прибавим и следната красива теорема [38], [45]:

Теорема 1.2. *Нека M е n-мерно Риманово многообразие, $n > 3$. Следните твърдения са еквивалентни:*

а) M е с нулев тензор на Вайл;

б) за всяка точка $p \in M$ и за всеки четири взаимно ортогонални единични вектора $x, y, z, u \in T_pM$ е в сила $\quad K(x,y) + K(z,u) = K(x,u) + K(y,z)$;

в) за всяка точка $p \in M$ и за всеки четири взаимно ортогонални вектора $x, y, z, u \in T_pM$ е в сила $\quad R(x,y,z,u) = 0$.

Една връзка между тензора на Вайл и понятията Айнщайново многообразие и многообразие с постоянна секционна кривина се дава със следната

Теорема 1.3. *Нека M е n-мерно Риманово многообразие, $n > 3$. Еквивалентни са твърденията:*

а) M е с постоянна секционна кривина;

б) M е Айнщайново и конформно плоско (т.е. $C = 0$).

При малки размерности ситуацията е различна. Наистина, при $n = 2$ всяко Риманово многообразие е конформно плоско [1]. От друга страна, ако $n = 3$ едно Риманово многообразие е конформно плоско тогава и само тогава, когато

$$(\nabla_x Q)(y, z) = (\nabla_y Q)(x, z)$$

където

$$Q = S - \frac{\tau}{2(n-1)} g \ ,$$

[1]. Оттук е ясно, че изучаването на конформно плоските многообразия при $n = 3$ е ориентирано към тензора Q и горното диференциално уравнение, а при $n > 3$ - към тензора на Вайл.

Сега да запишем някои от въведените формули в локални означения. Нека $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ е локална база на $\mathfrak{X}(M)$, отговаряща на карта (U, φ). За произволен тензор $T(X, Y, ...)$ от тип $(0, n)$ означаваме

$$T_{i_1 i_2, \ldots} = T\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ...\Big) \ .$$

Тогава (1.2) и (1.7) се записват съответно във вида

$$R_{ijkl} = c(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) \ , \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{1}{n-2}\big(g_{il} S_{jk} - g_{ik} S_{jl} + g_{jk} S_{il} - g_{jl} S_{ik}\big) \\ &- \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) \ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

В края на тази секция да отбележим, че свойства $1) - 4)$ на тензора R (последното от които всъщност е следствие от първите три), представляват интерес не само когато се отнасят за тензора на кривина на Риманово многообразие. Всеки тензор от тип (0,4) над реално векторно пространство, който ги изпълнява, наричаме *LC-тензор*. На много места нататък ще работим с LC-тензори. Всъщност вече се запознахме и с други LC-тензори, освен тензора на кривина – такива са тензорът на Вайл, $\varphi(S)$ и π_1.

2 Почти Ермитови многообразия. Класове почти Ермитови многообразия

Нека (M, g) е Риманово многообразие, в което е дефинирано тензорно поле J от тип $(1, 1)$, така че да са в сила равенствата

$$J^2 = -id\,, \qquad g(x, y) = g(Jx, Jy)\ . \tag{2.1}$$

Тогава тройката (M, g, J) или просто M се нарича *почти Ермитово многообразие* или AH-многообразие, а тензорното поле J - *почти комплесна структура.* Да забележим, че от (2.1) следва

$$g(x, Jx) = 0\ , \tag{2.2}$$

както и че размерността на всяко почти Ермитово многообразие е четна. В общия случай ковариантната производна на почти комплексната структура има свойствата

$$(\nabla_x J)Jy = -J(\nabla_x J)y\ , \qquad g((\nabla_x J)y, z) + g(y, (\nabla_x J)z) = 0\ . \tag{2.3}$$

Тензорното поле $\Phi(x, y) = g(Jx, y)$ се нарича *Келерова форма* на M. От (2.3) следва, че ковариантната производна $F = \nabla\Phi$ на Φ има свойствата

$$F(x, y, z) + F(x, Jy, Jz) = 0\ , \qquad F(x, y, z) + F(x, z, y) = 0\ .$$

В случая, когато $\nabla J = 0$ (т.е. $\nabla\Phi = 0$), многообразието се нарича *Келерово.*

През 1980 г. излезе фундаменталната статия [25] на Грей-Хервела, в която се даде класификация на почти Ермитовите многообразия, свързана със свойствата на ковариантната производна $\nabla\Phi$ на Келеровата форма Φ. Накратко идеята е следната. Нека V е $2n$-мерно реално векторно пространство с положително дефинитна метрика и комплексна структура J. Разглежда се пространството W от всички тензори α от тип (0,3), имащи свойствата на $\nabla\Phi$, т.е.

$$\alpha(x, y, z) = -\alpha(x, z, y) = -\alpha(x, Jy, Jz)\ .$$

Изучава се разлагането на W на подпространства, инвариантни под действието на унитарната група $U(n)$. Доказва се, че W се разлага в директна сума

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$$

на четири неприводими инвариантни подпространства, които са взаимно ортогонални. По този начин при $n \geq 3$ се получават общо 16 инвариантни подпространства на W (като се включат самото W и $\{0\}$), на всяко от които отговаря клас почти Ермитови многообразия. Голяма част от тези класове бяха вече в процес на усилено изучаване. Ще отбележим следните класове, които ще бъдат разглеждани в настоящата работа:

1) *Келерови многообразия*, които, както вече казахме, се характеризират с условието $\nabla J = 0$. Те отговарят на нулата на W;

2) *Приблизително Келерови* или *NK-многообразия*, характеризирани с $(\nabla_x \Phi)(x, y) = 0$ или $(\nabla_x J)x = 0$. Те отговарят на подпространството W_1;

3) *Почти Келерови* или *AK-многообразия*, характеризирани с $d\Phi = 0$, където $d\Phi$ е външната производна на Φ или

$$g((\nabla_x J)y, z) + g((\nabla_y J)z, x) + g((\nabla_z J)x, y) = 0 \ .$$

Отговарят на подпространството W_2;

4) *Ермитови полу-Келерови* или *HSK-многообразия*, характеризирани с

$$(\nabla_x J)y = (\nabla_{Jx} J)Jy \ , \qquad \delta\Phi = \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{e_i} J)e_i = 0 \ ,$$

където $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ е произволна ортонормирана база на допирателно пространство. Отговарят на W_3;

5) *W_4-многообразия*, характеризирани с

$$\begin{aligned}(\nabla_x \Phi)(y, z) = \frac{1}{2(n-1)} \big\{ & g(x, z)\delta\Phi(y) - g(x, y)\delta\Phi(z) \\ & - g(x, Jz)\delta\Phi(Jy) + g(x, Jy)\delta\Phi(Jz) \big\} \, .\end{aligned}$$

Тук се включват всички конформно Келерови многообразия;

6) *Квази-Келерови (QK)-многообразия*, дефинирани с $(\nabla_x J)y + (\nabla_{Jx} J)Jy = 0$. Отговарят на $W_1 \oplus W_2$;

7) *Полу-Келерови* или *SK-многообразия*, характеризирани с $\delta\Phi = 0$. Отговарят на $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$;

8) *Ермитови* или *H-многообразия*, характеризирани с $(\nabla_x J)y = (\nabla_{Jx} J)Jy$. Отговарят на $W_3 \oplus W_4$.

Ако с K означим класа на Келеровите многообразия, в сила са следните строги включвания:

$$K \subset NK \subset QK \subset SK \ , \qquad K \subset AK \subset QK \subset SK \ , \qquad K \subset H \ .$$

Освен това са в сила:

$$NK \cap AK = K \ , \qquad QK \cap H = K \ , \qquad SK \cap H = HSK \ .$$

Освен свойствата на Келеровата форма, при изучаването на почти Ермитовите многообразия важна роля играят и свойствата на тензора на кривината, свързани с почти комплексната структура. Специално при Келерово многообразие от $\nabla J = 0$ следва, че той удовлетворява условието

$$R(x,y,z,u) = R(x,y,Jz,Ju) \ , \tag{2.4}$$

което понякога се нарича *Келерово тъждество.*

В много случаи са интересни почти Ермитови многообразия с тензор на кривината, изпълняващ (2.4) или някое по-слабо свойство. По-точно, разглеждат се условията

1) $R(x,y,z,u) = R(x,y,Jz,Ju)$;

2) $R(x,y,z,u) = R(x,y,Jz,Ju) + R(x,Jy,z,Ju) + R(Jx,y,z,Ju)$;

3) $R(x,y,z,u) = R(Jx,Jy,Jz,Ju)$.

За даден клас L почти Ермитови многообразия, с L_i се означава неговият подклас с тензор на кривината, изпълняващ свойство i. Тогава:

$$AH_1 \subset AH_2 \subset AH_3 \ , \qquad NK = NK_2 \ , \qquad K = K_1 = NK_1 \ .$$

В края на тази секция да се спрем и на въпроса за секционната кривина в почти Ермитовата геометрия. Да отбележим преди всичко, че тук не е интересно да се разглеждат секционните кривини за произволни площадки, защото така се игнорира присъствието на почти комплексната структура, а от друга страна се получават твърде силни условия.

Поради естествената им връзка с комплексните многообразия, холоморфните площадки са първите, използвани при почти Ермитови многообразия. Една площадка α се нарича *холоморфна*, ако $\alpha = J\alpha$. Казваме, че многообразието е с *точково постоянна холоморфна секционна кривина*, когато във всяка точка кривината

$H(x) = K(x, Jx)$ $(|x| = 1)$ на произволна холоморфна площадка е функция само на точката. За Келерови многообразия е в сила следният аналог на теоремата на Шур:

Теорема 2.1. *[37] Нека M е $2n$-мерно свързано Келерово многообразие, $n \geq 2$, с точково постоянна холоморфна секционна кривина $\mu(p)$. Тогава то е с постоянна холоморфна секционна кривина, т.е. μ е глобална константа.*

Основни примери на Келерови многообразия с постоянна холоморфна секционна кривина са $\mathbb{C}^n$ (което разбира се е плоско), n-мерното комплексно проективно пространство $\mathbb{CP}^n(\mu)$ $(\mu > 0)$ и n-мерното комплексно хиперболично пространство $\mathbb{CD}^n(\mu)$ $(\mu < 0)$.

Подобно на многообразията с постоянна кривина, Келеровите многообразия с постоянна холоморфна секционна кривина имат тензор на кривина със специален вид, именно

$$R = \mu\big(\pi_1 + \pi_2\big) \ , \tag{2.5}$$

където

$$\pi_2(x, y, z, u) = g(x, Ju)g(y, Jz) - g(x, Jz)g(y, Ju) - 2g(x, Jy)g(z, Ju) \ .$$

Всъщност (2.5) е в сила и за произволно AH_1-многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина μ. За почти Ермитови многообразия, които не са от класа AH_1, изглежда не могат да се направят съществени заключения от условието за постоянна холоморфна секциона кривина. Все пак тук трябва да се спомене класификационната теорема на Грей за NK-многообразия с постоянна холоморфна секционна кривина – те са локално изометрични на шестмерната сфера или на Келерово многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина [22]. Но още веднъж да подчертаем, този резултат е по-скоро изключение. Както ще видим и в много случаи нататък, за почти Ермитови многообразия е по-подходящо да се разглеждат не холоморфните, а антихоломорфните подпространства на допирателните пространства.

Едно подпространство α на T_pM се нарича *антихоломорфно*, ако $\alpha \perp J\alpha$. Размерността на антихоломорфно подпространство е $\leq n$. В [7] се доказва, че за Келерови многообразия с размерност $2n \geq 6$ условията за постоянна холоморфна и за постоянна антихоломорфна секционна кривина са еквивалентни. За по-общи почти Ермитови многообразия обаче антихоломорфните площадки дават по-добра информация за многообразието.

В комплексна локална координатна система съществените компоненти на тензора на кривина за Келерово многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина μ имат вида

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = \mu(g_{\alpha\bar{\beta}}g_{\gamma\bar{\delta}} + g_{\alpha\bar{\delta}}g_{\gamma\bar{\beta}}) \ . \tag{2.6}$$

Тук специално отбелязваме приликата на структурата на (съществените компоненти на) този тензор с представянето (1.8) в реални координати на тензора на кривина на пространство с постоянна секционна кривина.

3 Тензор на Бохнер за Келерово многообразие

Както видяхме, при Риманови многообразия тензорът на Вайл има ясен геометричен смисъл и тясна връзка със секционната кривина. Естествено е при Келерови многообразия да се потърси негов аналог, който да играе подобна роля, но отчитайки комплексната структура.

В [5], изучавайки числата на Бети за Келерово многообразие, Бохнер въвежда нов тензор, който дава в Келеровия случай резултати, напълно аналогични на тези, които се получават с тензора на Вайл за Риманови многообразия. Да отбележим обаче (както е направил и авторът в [5]), че това въвеждане е напълно формално, на базата на алгебрична прилика. Именно, като се отчита връзката между тензора на кривина при пространство с постоянна секционна кривина (1.8) и при конформно плоско многообразие (1.9) от една страна и от друга страна вида на тензора на кривина (2.6) за Келерово многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина, се дефинира следният тензор (който днес наричаме *тензор на Бохнер*):

$$\begin{aligned} B_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} & -\frac{1}{n+2}(g_{\alpha\bar{\beta}}S_{\gamma\bar{\delta}} + g_{\alpha\bar{\delta}}S_{\gamma\bar{\beta}} + g_{\gamma\bar{\delta}}S_{\alpha\bar{\beta}} + g_{\gamma\bar{\beta}}S_{\alpha\bar{\delta}}) \\ & +\frac{\tau}{2(n+1)(n+2)}(g_{\alpha\bar{\beta}}g_{\gamma\bar{\delta}} + g_{\alpha\bar{\delta}}g_{\gamma\bar{\beta}}) \ . \end{aligned}$$

Да забележим, че при дефинирането на този тензор е отчетена и една важна особеност на тензора на Вайл, на която обърнахме внимание с (1.6) – неговият тензор на Ричи е нула. Именно коефициентите в горното представяне са подбрани така, че съответният на B тензор на Ричи да е тъждествено нула.

Тук можем да се запитаме, дали тензорът на Бохнер е инвариантен при конформна смяна на метриката. Този въпрос обаче не е особено смислен засега, защото при конформна смяна $\tilde{g} = e^{2\sigma} g$ условието за Келерово многообразие се нарушава, т.е. новата метрика $\tilde{g}$ не е Келерова (освен ако σ е константа). На въпроса за конформна инвариантност на тензора на Бохнер ще се върнем пак, когато говорим за този тензор при почти Ермитови многообразия.

Макар и без наличие на геометрични аргументи за въвеждането си, тензорът на Бохнер бързо става обект на силен интерес. По-късно Тачибана [48] го представя в реална координатна система. В глобални означения това представяне има вида

$$B = R - \frac{1}{2(n+2)}(\varphi + \psi)(S) + \frac{\tau}{4(n+1)(n+2)}(\pi_1 + \pi_2) \ ,$$

където операторът ψ е дефиниран с

$$\begin{aligned} \psi(Q)(x,y,z,u) \ &= g(x,Ju)Q(y,Jz) - g(x,Jz)Q(y,Ju) \\ &+ g(y,Jz)Q(x,Ju) - g(y,Ju)Q(x,Jz) \\ &- 2g(x,Jy)Q(z,Ju) - 2g(z,Ju)Q(x,Jy) \end{aligned}$$

за произволен тензор Q от тип (0,2). Да забележим, че $\psi(g) = 2\pi_2$.

Разбира се, чисто алгебричната аналогия между тензорите на Вайл и на Бохнер не е достатъчна. Важно е да се изучи и геометричният смисъл на последния. Но например опитите за пренасяне на резултата за конформна еквивалентност с плоско Римановo многообразие в комплексния случай не водят до полезен резултат, дори когато се разглежда конформно изобразяване само на холоморфни площадки. Затова ще споменем следните аналози на Теореми 1.2 и 1.3, имащи пряко отношение към геометричната характеристика на тензора на Бохнер:

Теорема 3.1. *[52] Нека M е $2n$-мерно Келерово многообразие, $n > 3$. Следните твърдения са еквивалентни:*

а) M е с нулев тензор на Бохнер;

б) за всяка точка $p \in M$ и за всеки ортогонален базис $\{x,y,z,u\}$ на четиримерно антихоломорфно подпространство на T_pM е в сила $\quad R(x,y,z,u) = 0$;

в) за всяка точка $p \in M$ и за всеки ортонормиран базис $\{x, y, z, u\}$ на четиримерно антихоломорфно подпространство на T_pM е в сила

$$K(x, y) + K(z, u) = K(x, u) + K(y, z) \ .$$

Теорема 3.2. *Нека M е $2n$-мерно Келерово многообразие, $n \geq 2$. Еквивалентни са твърденията:*

а) M е с постоянна холоморфна секционна кривина;

б) M е Айнщайново и с нулев тензор на Бохнер.

Тензорът на Бохнер се появява и при разглеждане на линейни връзки между кривини на допирателни пространства в точка на многообразието. По-точно, освен секционната кривина на една площадка α с ортонормиран базис $\{x, y\}$, можем да разглеждаме и кривината

$$S(x, x) + S(y, y)$$

(директно се проверява, че това число не зависи от базиса на α). При това, ако M е Келерово, а площадката α – холоморфна, то поради $S(x, x) = S(Jx, Jx)$ горната кривина е $2S(x, x)$. Поради това е интересна линейна връзка между холоморфната кривина и кривината на Ричи. За такава връзка е в сила следната теорема, имаща точен аналог в Римановата геометрия [2], [11]:

Теорема 3.3. *Нека M е $2n$-мерно Келерово многообразие, $n \geq 2$. Нека за всяка точка $p \in M$ и за всяка холоморфна площадка $\alpha = span\{x, Jx\}$ ($|x| = 1$) в T_pM е в сила линейна връзка между кривините на α:*

$$\lambda H(x) + \mu S(x, x) = c(p) \ ,$$

където λ, μ са реални константи, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Тогава

а) при $\lambda = 0$ M е Айнщайново;

б) при $\lambda \neq 0$ и $4\lambda + (n+2)\mu = 0$ M е с нулев тензор на Бохнер;

в) при $\lambda \neq 0$ и $4\lambda + (n+2)\mu \neq 0$ M е с постоянна холоморфна секционна кривина.

От друга страна тензорът на Бохнер за Келерово многообразие има и специфични геометрични характеристики (свързани с комплексната структура), които тук се появяват по естествен начин, но нямат аналози в Римановия случай. Ще цитираме следните резултати:

Теорема 3.4. *[46] Нека M е $2n$-мерно Келерово многообразие, $n \geq 2$. Еквивалентни са твърденията:*

а) M е с нулев тензор на Бохнер;

б) за всяка точка $p \in M$ сумата $\sum_{i=1}^{n} H(e_i)$ на холоморфните кривини не зависи от ортонормирания базис $\{e_1, Je_1, ..., e_n, Je_n\}$ на T_pM, т.е. е функция само на p.

Теорема 3.5. *[13] Нека M е $2n$-мерно Келерово многообразие, $n \geq 2$. Еквивалентни са твърденията:*

а) M е с нулев тензор на Бохнер;

б) за всяка точка $p \in M$ кривината на произволно n-мерно антихоломорфно подпространство E^n на T_pM не зависи от E^n, т.е. е функция само на p.

Тук под *кривина на E^n* се разбира числото

$$K(E^n) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} K(e_i, e_j) \ ,$$

където $\{e_1, ..., e_n\}$ е произволен ортонормиран базис на E^n.

ВТОРА ГЛАВА

ТЕНЗОРИ НА БОХНЕР ЗА ПОЧТИ ЕРМИТОВО МНОГООБРАЗИЕ

4 Почти Ермитови многообразия с нулев класически тензор на Бохнер

Тензорът на Бохнер, който разгледахме в предишната секция за Келерово многообразие, разбира се има смисъл и при произволно почти Ермитово многообразие. Но не бива да се забравя, че той отразява спецификата на Келеровия случай и не може да се очаква да е особено полезен за по-общи почти Ермитови многообразия. Ето защо естествено се появиха негови обобщения. Те ще са обект на разглеждане в следващите секции. Сега ще обосновем необходимостта от такива обобщения като покажем, че за почти Ермитово многообразие анулирането на класическия тензор на Бохнер води до твърде силно ограничение - ако многообразието не е Келерово в дадена точка, то е плоско в нейна околност.

И така, навсякъде в тази секция M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие с нулев (класически) тензор на Бохнер, т.е. тензорът на кривината има вида

$$\begin{aligned}
R(x,y,z,u) = \frac{1}{2(n+2)}\big(&g(x,u)S(y,z) - g(x,z)S(y,u) \\
&+g(y,z)S(x,u) - g(y,u)S(x,z) \\
&+g(x,Ju)S(y,Jz) - g(x,Jz)S(y,Ju) \\
&+g(y,Jz)S(x,Ju) - g(y,Ju)S(x,Jz) \\
&-2g(x,Jy)S(z,Ju) - 2g(z,Ju)S(x,Jy)\big) \\
-\frac{\tau}{4(n+1)(n+2)}\big(&g(x,u)g(y,z) - g(x,z)g(y,u) \\
&+g(x,Ju)g(y,Jz) - g(x,Jz)g(y,Ju) - 2g(x,Jy)g(z,Ju)\big)\,.
\end{aligned}$$

Да отбележим следното: лесно се показва, че допирателното пространство в произволна точка на почти Ермитово многообразие притежава ортонормиран базис от вида $\{e_1, ..., e_{2n}\}$, за който $e_{n+i} = Je_i \; i = 1, ..., n$. Такъв базис се нарича *адаптиран*. За адаптиран базис, с използване симетричността на тензора на Ричи, директно получаваме

$$\sum_{i=1}^{2n} S(e_i, Je_i) = 0 \ . \tag{4.1}$$

Оттук разбира се следва, че последното равенство е в сила за произволен ортонормиран базис на T_pM.

Ще започнем със следната

Лема 4.1. *(Касабов, [33]) Тензорът на Ричи S за почти Ермитово многообразие M с нулев тензор на Бохнер е хибриден, т.е.*

$$S(x, y) = S(Jx, Jy) \ .$$

Доказателство. За произволна точка $p \in M$, нека $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ е ортонормиран базис на T_pM. В горната формула за R полагаме $y = z = e_i$ и сумираме за $i = 1, ..., 2n$, като използваме (2.2) и (4.1):

$$S(x, u) = \frac{1}{2(n+2)}\big\{(2n+1)S(x, u) + 3S(Jx, Ju)\big\} \ ,$$

откъдето твърдението следва лесно. □

От $B = 0$ и Лема 4.1 получаваме

$$R(x, y, z, u) = R(x, y, Jz, Ju) \quad , \tag{4.2}$$

т.е. M е AH_1-многообразие.

Въвеждаме тензора

$$Q = \frac{1}{2(n+2)}S - \frac{\tau}{8(n+1)(n+2)}g \ .$$

От симетричността на тензора на Ричи и Лема 4.1 (и аналогичните свойства на метричния тензор) следва

$$Q(x, y) = Q(y, x) \quad \text{и} \quad Q(x, y) = Q(Jx, Jy) \ . \tag{4.3}$$

Директно се проверява, че ковариантната производна на Q има свойството

$$(\nabla_x Q)(Jy, Jz) = (\nabla_x Q)(z, y) - Q((\nabla_x J)y, Jz) - Q(Jy, (\nabla_x J)z) \ ,$$

а тензорът на кривината се записва във вида

$$\begin{aligned} R(x,y,z,u) &= g(x,u)Q(y,z) - g(x,z)Q(y,u) \\ &+ g(y,z)Q(x,u) - g(y,u)Q(x,z) \\ &+ g(x,Ju)Q(y,Jz) - g(x,Jz)Q(y,Ju) \\ &+ g(y,Jz)Q(x,Ju) - g(y,Ju)Q(x,Jz) \\ &- 2g(x,Jy)Q(z,Ju) - 2g(z,Ju)Q(x,Jy)\,. \end{aligned}$$

Ще използваме още следните свойства на ковариантната производна на почти комплексната структура, които са в сила за произволно почти Ермитово многообразие и следват от (2.3):

$$g(x,(\nabla_y J)x) = 0 \qquad g(Jx,(\nabla_y J)x) = 0 \ .$$

Нека $\{e_\alpha,\ Je_\alpha,\ \alpha = 1,...,n\}$ е адаптиран базис на допирателното пространство T_pM в точка p на M. За удобство ще работим в комплексификацията $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ на T_pM. Означаваме

$$Z_\alpha = e_\alpha - iJe_\alpha\ , \qquad Z_{\bar\alpha} = e_\alpha + iJe_\alpha\ .$$

Тогава

$$JZ_\alpha = iZ_\alpha\ , JZ_{\bar\alpha} = -iZ_{\bar\alpha}\ . \tag{4.4}$$

Ясно е, че векторите $Z_1,...,Z_n$, съответно $Z_{\bar 1},...,Z_{\bar n}$, образуват базис на собственото подпространство

$$(T_pM)^{1,0} = \{Z \in (T_pM)^{\mathbb{C}}\ :\ JZ = iZ\}\ ,$$

съответно

$$(T_pM)^{0,1} = \{Z \in (T_pM)^{\mathbb{C}}\ :\ JZ = -iZ\}$$

на $(T_pM)^{\mathbb{C}}$, отговарящо на собствената стойност i, съответно $-i$, на J.

Лесно се проверяват равенствата

$$Q(Z_\alpha,Z_\beta) = Q(Z_{\bar\alpha},Z_{\bar\beta}) = 0\,, \qquad Q(Z_\alpha,Z_{\bar\beta}) = Q(Z_{\bar\beta},Z_\alpha)\,,$$

$$g(Z_\alpha,Z_\beta) = g(Z_{\bar\alpha},Z_{\bar\beta}) = 0\,, \qquad g((\nabla_Z J)Z_\alpha,Z_{\bar\beta}) = 0$$

за произволни $\alpha,\beta = 1,...,n$ и произволен вектор $Z \in (T_pM)^{\mathbb{C}}$. Тези равенства ще използваме многократно нататък, без изрично споменаване.

Като използваме (4.2) и второто тъждество на Бианки

$$(\nabla_x R)(y,z,u,v) + (\nabla_y R)(z,x,u,v) + (\nabla_z R)(x,y,u,v) = 0 \ , \tag{4.5}$$

извличаме равенството

$$\begin{aligned} &R(y,z,(\nabla_x J)u, Jv) + R(y,z,Ju,(\nabla_x J)v) \\ +&R(z,x,(\nabla_y J)u, Jv) + R(z,x,Ju,(\nabla_y J)v) \\ +&R(x,y,(\nabla_z J)u, Jv) + R(x,y,Ju,(\nabla_z J)v) \quad = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Сега ще докажем основния резултат в тази секция:

Теорема 4.2. *(Касабов, [33]) Нека M е $2n$-мерно ($n > 2$) почти Ермитово многообразие с нулев (класически) тензор на Бохнер. Ако M не е Келерово в точка p, то M е плоско в околност на p.*

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че ако M не е Келерово в p, то M е плоско в точката p. Да означим с Q и тензора от тип (1,1), отговарящ на симетричния тензор Q:

$$g(Q(x),y) = Q(x,y) \ .$$

Поради (4.3) можем да предполагаме, че избраният адаптиран базис диагонализира Q, т.е.

$$Q(e_\alpha) = \mu_\alpha e_\alpha \qquad Q(Je_\alpha) = \mu_\alpha Je_\alpha \qquad \alpha = 1,2,...,n \ .$$

Тогава имаме още

$$Q(Z_\alpha) = \mu_\alpha Z_\alpha \qquad Q(JZ_\alpha) = \mu_\alpha JZ_\alpha \qquad \alpha = 1,2,...,n \ .$$

За да се убедим, че M е плоско в p, ще покажем, че тензорът Q е тъждествено нула в p, т.е. $\mu_1 = ... = \mu_n = 0$.

Преди всичко да забележим, че от (2.1), (2.3) и (4.4) лесно следва

$$g((\nabla_Z J)Z_\alpha, Z_{\bar\beta}) = 0$$

за произволен вектор Z и произволни α, β. Следователно предположението, че M не е Келерово в p, води до следните възможности:

1. Съществуват $\alpha,\ \beta$ така, че

$$g(Z_\alpha,(\nabla_{Z_\beta}J)Z_\beta)\neq 0 \quad .$$

В (4.6) полагаме $x=Z_\alpha,\ y=Z_{\bar\alpha},\ z=Z_\beta,\ u=Z_\beta,\ v=Z_\alpha$ и получаваме:

$$(5\mu_\alpha+\mu_\beta)\ g(Z_\alpha,(\nabla_{Z_\beta}J)Z_\beta)=0\ . \tag{4.7}$$

Сега да вземем в (4.6) $x=Z_\alpha,\ y=Z_\beta,\ z=Z_{\bar\gamma},\ u=Z_\beta,\ v=Z_\gamma$. Резултатът е

$$(\mu_\alpha+\mu_\gamma)g(Z_\alpha,(\nabla_{Z_\beta}J)Z_\beta)=0\ . \tag{4.8}$$

Аналогично, ако в (4.6) вземем $x=Z_\beta,\ y=Z_\gamma,\ z=Z_{\bar\gamma},\ u=Z_\beta,\ v=Z_\alpha$, ще получим

$$(\mu_\alpha+\mu_\beta+2\mu_\gamma)g((\nabla_{Z_\beta}J)Z_\beta,Z_\alpha)=0\ . \tag{4.9}$$

Тъй като по предположение $g(Z_\alpha,(\nabla_{Z_\beta}J)Z_\beta)\neq 0$, равенствата (4.7), (4.8) и (4.9) влекат $\mu_\alpha=\mu_\beta=\mu_\gamma=0$ за произволен индекс γ, различен от α и β. Следователно M е плоско в p.

2. За някои $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha)$ е в сила

$$g((\nabla_{Z_\alpha}J)Z_\beta,Z_\gamma)\neq 0 \quad .$$

Полагаме в (4.6) $x=Z_\alpha,\ y=Z_\beta,\ z=Z_{\bar\beta},\ u=Z_\gamma,\ v=Z_\beta$ и получаваме:

$$(5\mu_\beta+\mu_\gamma)\ g((\nabla_{Z_\alpha}J)Z_\beta,Z_\gamma)-(\mu_\alpha+\mu_\beta)g((\nabla_{Z_\beta}J)Z_\alpha,Z_\gamma)=0\ . \tag{4.10}$$

В последното сменяме местата на α и β:

$$(5\mu_\alpha+\mu_\gamma)\ g((\nabla_{Z_\beta}J)Z_\alpha,Z_\gamma)-(\mu_\alpha+\mu_\beta)g((\nabla_{Z_\alpha}J)Z_\beta,Z_\gamma)=0\ . \tag{4.11}$$

Поради предположението $g((\nabla_{Z_\alpha}J)Z_\beta,Z_\gamma)\neq 0$, системата (4.10), (4.11) има нетривиално решение и следователно детерминантата ѝ е нула:

$$(5\mu_\alpha+\mu_\gamma)(5\mu_\beta+\mu_\gamma)=(\mu_\alpha+\mu_\beta)^2 \quad . \tag{4.12}$$

Тъй като предположението $g((\nabla_{Z_\alpha}J)Z_\beta,Z_\gamma)\neq 0$ влече $g((\nabla_{Z_\alpha}J)Z_\gamma,Z_\beta)\neq 0$, то можем да сменим в последното β и γ:

$$(5\mu_\alpha+\mu_\beta)(5\mu_\gamma+\mu_\beta)=(\mu_\alpha+\mu_\gamma)^2 \quad . \tag{4.13}$$

Ще разгледаме следните две възможности:

Случай I. $g((\nabla_{Z_\beta} J)Z_\alpha, Z_\gamma) \neq 0$. Тогава имаме още (заменяйки в (4.13) α и β):

$$(5\mu_\beta + \mu_\alpha)(5\mu_\gamma + \mu_\alpha) = (\mu_\beta + \mu_\gamma)^2 \quad . \tag{4.14}$$

Ще покажем, че системата от равенствата (4.12), (4.13), (4.14) влече $\mu_\alpha = \mu_\beta = \mu_\gamma = 0$. Наистина, ако положим $\mu_\alpha = a,\ \mu_\beta = b,\ \mu_\gamma = c$, тази система се записва във вида:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 23ab + 5ac + 5bc + c^2\,, \\ b^2 + c^2 = 23bc + 5ba + 5ca + a^2\,, \\ c^2 + a^2 = 23ca + 5cb + 5ab + b^2\,. \end{cases} \tag{4.15}$$

От първите две уравнения следва

$$a^2 - c^2 = 9b(a-c) \qquad \text{или} \qquad (a-c)(a+c-9b) = 0 \quad .$$

Тъй като в разглеждания случай има симетрия между $a,\ b,\ c$, получаваме системата:

$$\begin{cases} (a-c)(a+c-9b) = 0\,, \\ (b-a)(b+a-9c) = 0\,, \\ (c-b)(c+b-9a) = 0\,. \end{cases} \tag{4.16}$$

Ако предположим, че

$$\begin{cases} a+c-9b = 0\,, \\ b+a-9c = 0\,, \\ c+b-9a = 0\,, \end{cases}$$

то директно намираме $a = b = c = 0$.

Нека например $a + c - 9b \neq 0$. Тогава първото от уравненията (4.16) влече $a = c$. Ако е в сила и $a = b$, то кое да е от уравненията (4.15) влече $a = b = c = 0$. Да предположим, че $a \neq b$. Тогава от второто уравнение (4.16) следва $b = 8a$, а сега от първото на (4.15) получаваме $a = 0$ и следователно $a = b = c = 0$.

Случай II. $g((\nabla_{Z_\beta} J)Z_\alpha, Z_\gamma) = 0$. Сега (4.10) и (4.11) влекат

$$5\mu_\beta + \mu_\gamma = 0 \qquad \text{и} \qquad \mu_\alpha + \mu_\beta = 0 \ .$$

Следователно $\mu_\gamma = -5\mu_\beta,\ \mu_\alpha = -\mu_\beta$ и използвайки (4.13), получаваме $\mu_\beta = 0$. Оттук $\mu_\alpha = \mu_\gamma = 0$.

Следователно условието

$$g((\nabla_{Z_\alpha} J)Z_\beta, Z_\gamma) \neq 0 \quad \text{за } \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$$

винаги влече $\mu_\alpha = \mu_\beta = \mu_\gamma = 0$ и многообразието е плоско при $n = 3$.

Нека $n > 3$. В (4.6) вземаме $x = Z_\alpha,\ y = Z_\delta,\ z = Z_{\bar\delta},\ u = Z_\beta,\ v = Z_\gamma$ и получаваме:

$$(\mu_\beta + \mu_\gamma + 2\mu_\delta) g((\nabla_{Z_\alpha} J)Z_\beta, Z_\gamma) = 0\ .$$

Поради

$$g((\nabla_{Z_\alpha} J)Z_\beta, Z_\gamma) \neq 0$$

и $\mu_\beta = \mu_\gamma = 0$ оттук следва $\mu_\delta = 0$ и значи M е плоско в p.

3. Сега да предположим, че

$$g((\nabla_{Z_{\bar\beta}} J)Z_\beta, Z_\alpha) \neq 0$$

за някои $\alpha,\ \beta$. От (4.6), при $x = Z_\alpha,\ y = Z_{\bar\alpha},\ z = Z_{\bar\beta},\ u = Z_\alpha,\ v = Z_\beta$ намираме:

$$(5\mu_\alpha + \mu_\beta) g((\nabla_{Z_{\bar\beta}} J)Z_\beta, Z_\alpha) = 0\ . \tag{4.17}$$

Сега в (4.6) полагаме $x = Z_\alpha,\ y = Z_{\bar\beta},\ z = Z_{\bar\gamma},\ u = Z_\beta,\ v = Z_\gamma$, съответно $x = Z_{\bar\beta},\ y = Z_\gamma,\ z = Z_{\bar\gamma},\ u = Z_\beta,\ v = Z_\alpha$ и получаваме:

$$(\mu_\alpha + \mu_\gamma)\ g((\nabla_{Z_{\bar\beta}} J)Z_\beta, Z_\alpha) + (\mu_\alpha + \mu_\beta) g((\nabla_{Z_{\bar\gamma}} J)Z_\gamma, Z_\alpha) = 0\ , \tag{4.18}$$

съответно

$$(\mu_\alpha + \mu_\beta + 2\mu_\gamma)\ g((\nabla_{Z_{\bar\beta}} J)Z_\beta, Z_\alpha) - (\mu_\beta + \mu_\gamma) g((\nabla_{Z_{\bar\gamma}} J)Z_\gamma, Z_\alpha) = 0\ . \tag{4.19}$$

Ще покажем, че при предположението $g((\nabla_{Z_{\bar\beta}} J)Z_\beta, Z_\alpha) \neq 0$ от равенствата (4.17), (4.18) и (4.19) следва, че M е плоско в p. Наистина, имаме следните възможности:

Случай I: $g((\nabla_{Z_{\bar\gamma}} J)Z_\gamma, Z_\alpha) = 0$. Сега (4.17), (4.18) и (4.19 влекат

$$\begin{cases} 5\mu_\alpha + \mu_\beta = 0\,, \\ \mu_\alpha + \mu_\gamma = 0\,, \\ \mu_\alpha + \mu_\beta + 2\mu_\gamma = 0\,, \end{cases}$$

откъдето $\mu_\alpha = \mu_\beta = \mu_\gamma = 0$.

Случай II: $g((\nabla_{Z_{\bar{\gamma}}} J)Z_\gamma, Z_\alpha) \neq 0$. Поради (4.17) е в сила

$$5\mu_\alpha + \mu_\beta = 0\,.$$

Тук сменяме местата на β и γ и намираме

$$5\mu_\alpha + \mu_\gamma = 0\,.$$

Последните две равенства влекат $\mu_\beta = \mu_\gamma = -5\mu_\alpha$. Тъй като по предположение системата от (4.18) и (4.19) има нетривиално решение, нейната детерминанта е нула:

$$(\mu_\alpha + \mu_\gamma)(\mu_\beta + \mu_\gamma) + (\mu_\alpha + \mu_\beta)(\mu_\alpha + \mu_\beta + 2\mu_\gamma) = 0\ .$$

Сега с използване на $\mu_\beta = \mu_\gamma = -5\mu_\alpha$ лесно извличаме $\mu_\alpha = \mu_\beta = \mu_\gamma = 0$, така че многообразието M отново е плоско в p.

4. Накрая да предположим, че съществуват индекси $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)$ така, че

$$g((\nabla_{Z_{\bar{\alpha}}} J)Z_\beta, Z_\gamma) \neq 0\ \ .$$

В (4.6) вземаме $x = Z_{\bar{\alpha}},\ y = Z_\beta,\ z = Z_{\bar{\beta}},\ u = Z_\gamma,\ v = Z_\beta$. Получаваме

$$(5\mu_\beta + \mu_\gamma) g((\nabla_{Z_{\bar{\alpha}}} J)Z_\beta, Z_\gamma) = 0\ .$$

Оттук $5\mu_\beta + \mu_\gamma = 0$. Да забележим, че в условието

$$g((\nabla_{Z_{\bar{\alpha}}} J)Z_\beta, Z_\gamma) \neq 0$$

индексите β и γ участват симетрично и следователно е в сила и $\mu_\beta + 5\mu_\gamma = 0$. Оттук $\mu_\beta = \mu_\gamma = 0$.

Сега от второто тъждество на Бианки (4.5) при $x = Z_{\bar{\alpha}}, y = Z_\beta, z = Z_\gamma, u = Z_\beta, v = Z_{\bar{\beta}}$ с използване на $\mu_\beta = \mu_\gamma = 0$ намираме

$$2(\nabla_{Z_\beta} Q)(Z_{\bar{\alpha}}, Z_\gamma) - 4(\nabla_{Z_\gamma} Q)(Z_{\bar{\alpha}}, Z_\beta) = 0$$

От последното, с отчитане симетрията между β и γ, извличаме

$$(\nabla_{Z_\beta} Q)(Z_{\bar{\alpha}}, Z_\gamma) = (\nabla_{Z_\gamma} Q)(Z_{\bar{\alpha}}, Z_\beta) = 0$$

От $\mu_\beta = 0$ и (4.5) при $x = Z_{\bar\alpha}, y = Z_\beta, z = Z_{\bar\beta}, u = Z_\beta, v = Z_\gamma$ получаваме $(\nabla_{Z_{\bar\alpha}} Q)(Z_\beta, Z_\gamma) = 0$.

Сега от (4.5) с $x = Z_\alpha, y = Z_{\bar\alpha}, z = Z_\beta, u = Z_\gamma, v = Z_{\bar\alpha}$ с използване на

$$(\nabla_{Z_{\bar\alpha}} Q)(Z_\beta, Z_\gamma) = 0 \qquad g((\nabla_{Z_{\bar\alpha}} J)Z_\beta, Z_\gamma) \neq 0 \qquad (\nabla_{Z_\beta} Q)(Z_{\bar\alpha}, Z_\gamma) = 0$$

и $\mu_\beta = 0$ получаваме $\mu_\alpha = 0$. Това означава, че при $n = 3$ многообразието M е плоско в p.

Остава да се убедим, че при $n > 3$ имаме и $\mu_\delta = 0$ за $\delta \neq \alpha, \beta, \gamma$. Заместваме в (4.6) $x = Z_{\bar\alpha},\ y = Z_\delta,\ z = Z_{\bar\delta},\ u = Z_\beta,\ v = Z_\gamma$ и получаваме:

$$(\mu_\beta + \mu_\gamma + 2\mu_\delta) g((\nabla_{Z_{\bar\alpha}} J)Z_\beta, Z_\gamma) = 0\,.$$

Поради $\mu_\beta = \mu_\gamma = 0$ това влече $\mu_\delta = 0$ и отново следва, че M е плоско в p. $\square$

Както виждаме, условието тензорът на Бохнер, дефиниран за Келерово многообразие, да е нула за почти Ермитово многообразие влече твърде силни ограничения. Това оправдава търсенето на друг тензор, който за произволно почти Ермитово многообразие да играе роля, подобна на ролята на тензора на Бохнер за Келерово и на тензора на Вайл за Риманово многообразие. В следващите две секции ще се запознаем с две възможности за въвеждане на такъв тензор.

5 Обобщен тензор на Бохнер

Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие. С тензора на кривината R Ганчев [11] асоциира тензор HR, дефиниран с

$$\begin{aligned} HR(x,y,z,u) \;&= \frac{3}{16}\;\big\{R(x,y,z,u) + R(x,y,Jz,Ju) \\ &\qquad + R(Jx,Jy,z,u) + R(Jx,Jy,Jz,Ju)\big\} \\ &+ \frac{1}{16}\;\big\{R(Jx,Jz,y,u) - R(Jy,Jz,x,u) \\ &\qquad + R(x,z,Jy,Ju) - R(y,z,Jx,Ju) + R(y,Jz,Jx,u) \\ &\qquad - R(x,Jz,Jy,u) + R(Jy,z,x,Ju) - R(Jx,z,y,Ju)\big\}\,. \end{aligned}$$

Директно се проверява, че този тензор има свойствата:

1) $HR(x,y,z,u) = -HR(y,x,z,u)$;

2) $HR(x,y,z,u) + HR(y,z,x,u) + HR(z,x,y,u) = 0$;

3) $HR(x,y,z,u) = -HR(x,y,u,z)$;

4) $HR(x,y,z,u) = HR(z,u,x,y)$;

5) $HR(x,y,z,u) = HR(Jx,Jy,z,u)$.

С други думи, HR има свойствата на тензора на кривина на Келерово многообразие. При това той е единственият тензор с тези свойства, който има същата холоморфна кривина, както самия тензор на кривината:

$$HR(x,Jx,Jx,x) = R(x,Jx,Jx,x).$$

Оттук следва както при AH_1-многообразия, че ако многообразието е с точково постоянна холоморфна секционна кривина μ, тензорът HR се представя във вида

$$HR = \frac{\mu}{4}(\pi_1 + \pi_2)\ .$$

Ясно е, че за AH_1-многообразие (следователно и за всяко Келерово многообразие) тензорите R и HR съвпадат.

За HR се дефинират тензор на Ричи $S(HR)$ и скаларна кривина $\tau(HR)$. Именно, ако $\{e_1,...,e_{2n}\}$ е ортонормирана база на T_pM, то

$$S(HR)(x,y) = \sum_{i=1}^{2n} HR(x,e_i,e_i,y)\ , \qquad \tau(HR)(p) = \sum_{i=1}^{2n} S(HR)(e_i,e_i)\ .$$

От горните свойства на HR следва, че тензорът на Ричи $S(HR)$ е симетричен и хибриден:

$$S(HR)(x,y) = S(HR)(y,x)\ , \qquad S(HR)(x,y) = S(HR)(Jx,Jy)\ .$$

По естествен начин се дефинират понятията HR-Айнщайново многообразие и HR-секционна кривина.

Обобщеният тензор на Бохнер $B(HR)$ за многообразието M се дефинира с [11]

$$B(HR) = HR - \frac{1}{2(n+2)}(\varphi+\psi)(S(HR)) + \frac{\tau(HR)}{4(n+1)(n+2)}(\pi_1+\pi_2)\ .$$

С други думи $B(HR)$ има същата алгебрична конструкция като класическия тензор на Бохнер, но е построен върху HR. Естествено той има и много свойства, аналогични на тези на класическия тензор на Бохнер за Келерово многообразие. Да отбележим следните резултати:

Теорема 5.1. *(Ганчев [13]) Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n \geq 2$. Еквивалентни са твърденията:*

а) M е с нулев обобщен тензор на Бохнер;

б) $HR(x, y, z, u) = 0$ за всяка четворка взаимно ортогонални вектори (x, y, z, u), базис на 4-мерно антихоломорфно допирателно подпространство на M;

в) за всяка точка $p \in M$ HR-кривината на произволно n-мерно антихоломорфно подпространство E^n на T_pM не зависи от E^n, т.е. е функция само на точката p.

Теорема 5.2. *(Ганчев [11], Станилов [2]) Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n \geq 2$. Нека за всяка точка $p \in M$ и за всяка холоморфна площадка $\alpha = span\{x, Jx\}$ ($|x| = 1$) в T_pM е в сила линейна връзка от вида:*

$$\lambda H(x) + \mu S(x, x) = c(p)\,,$$

където λ, μ са реални константи, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Тогава

а) при $\lambda = 0$ M е HR-Айнщайново;

б) при $\lambda \neq 0$ и $4\lambda + (n+2)\mu = 0$ M е с нулев обобщен тензор на Бохнер;

в) при $\lambda \neq 0$ и $4\lambda + (n+2)\mu \neq 0$ M е с точково постоянна холоморфна секционна кривина.

В [49] Тачибана и Лиу доказват следната характеристика на Келеровите произведения с нулев тензор на Бохнер:

Теорема 5.3. *Нека $2n$-мерното Келерово многообразие M е произведение $M_1 \times M_2$, където M_1 и M_2 са Келерови многообразия. Тогава M е с нулев тензор на Бохнер точно когато M_1, съотв. M_2, е с постоянна холоморфна секционна кривина μ, съотв. $(-\mu)$.*

Сега ще покажем, че това твърдение е в сила за произволно почти Ермитово многообразие и обобщения тензор на Бохнер. Разбира се, „постоянна холоморфна секционна кривина“ следва да се замени с „точково постоянна холоморфна секционна кривина“. Резултата ще използваме в по-късно в секция 8.

Теорема 5.4. *(Касабов [28]) Нека $2n$-мерното почти Ермитово многообразие M е произведение $M_1 \times M_2$, където M_1 и M_2 са почти Ермитови многообразия. Тогава M е с нулев обобщен тензор на Бохнер точно когато M_1, съотв. M_2, е с точково постоянна холоморфна секционна кривина μ, съотв. $(-\mu)$.*

Доказателство. От $B(HR)=0$ имаме

$$
\begin{aligned}
HR(x,y,z,u) &= \frac{1}{2(n+2)}\big\{g(x,u)S(HR)(y,z)-g(x,z)S(HR)(y,u)\\
&+ g(y,z)S(HR)(x,u)-g(y,u)S(HR)(x,z)\\
&+ g(x,Ju)S(HR)(y,Jz)-g(x,Jz)S(HR)(y,Ju)\\
&+ g(y,Jz)S(HR)(x,Ju)-g(y,Ju)S(HR)(x,Jz)\\
&- 2g(x,Jy)S(HR)(z,Ju)-2g(z,Ju)S(HR)(x,Jy)\big\}\\
&- \frac{\tau(HR)}{4(n+1)(n+2)}\big\{g(x,u)g(y,z)-g(x,z)g(y,u)\\
&+ g(x,Ju)g(y,Jz)-g(x,Jz)g(y,Ju)-2g(x,Jy)g(z,Ju)\big\}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Да означим с ∇^1 Римановата свързаност, а с R_1 - тензора на кривина на M_1. Аналогично означаваме HR_1, $S_1(HR_1)$, $\tau_1(HR_1)$. Да отбелжим, че в случая M_1 е напълно геодезично в M, т.е.

$$\nabla_X Y=\nabla^1_X Y \qquad \text{за} \;\; X,Y\in\mathfrak{X}(M_1)\ .$$

Оттук следва, че за всяко допирателно пространство T_pM_1 рестрикциите на R, HR и $S(HR)$ съвпадат с R_1, HR_1 и $S_1(HR_1)$, съответно. Нека $x\in T_pM_1$, а $\{e_1,...,e_{2k}\}$ е ортонормиран базис на T_pM_1. В (5.1) полагаме $u=x$, $y=z=E_i$ и като сумираме по $i=1,...,2k$, получаваме

$$S_1(HR_1)(x,x)=\left\{\frac{\tau_1(HR_1)}{2(n-k)}-\frac{(k+1)\tau(HR)}{2(n+1)(n-k)}\right\}g(x,x). \tag{5.2}$$

За произволен единичен вектор $x\in T_pM_1$ от (5.1) намираме

$$R_1(x,Jx,Jx,x)=\frac{4}{n+2}S_1(HR_1)(x,x)-\frac{\tau(HR)}{(n+1)(n+2)}. \tag{5.3}$$

От (5.2) и (5.3) следва, че M_1 е с точково постоянна холоморфна секционна кривина, която да означим μ. Оттук

$$S_1(HR_1)(x,x)=\frac{k+1}{2}\mu\, g(x,x) \tag{5.4}$$

за произволен вектор x, допирателен към M_1, а последното влече

$$\tau_1(HR_1)=k(k+1)\mu. \tag{5.5}$$

Аналогично M_2 е с точково постоянна холоморфна секционна кривина μ' и

$$\tau_2(HR_2) = (n-k)(n-k+1)\mu'. \tag{5.6}$$

Като използваме (5.3)–(5.6) и $\tau(HR) = \tau_1(HR_1) + \tau_2(HR_2)$, получаваме $\mu' = -\mu$.

Обратното е директна (макар и дълга) проверка с използване на факта, че ако например M_1 е с точково постоянна холоморфна секционна кривина μ, то е в сила $HR_1 = \dfrac{\mu}{4}(\pi_1 + \pi_2)$. □

Следствие 5.5. *(Касабов [28]) Нека почти Ермитовото многообразие M е произведение на повече от две почти Ермитови многообразия. Тогава M е с нулев обобщен тензор на Бохнер точно когато е с нулева холоморфна секционна кривина.*

6 Тензор на Бохнер за почти Ермитово многообразие

Както видяхме, обобщеният тензор на Бохнер е точен аналог на класическия тензор на Бохнер, като е построен върху HR. Но за разлика от Келеровия случай, при произволно почти Ермитово многообразие, когато се интересуваме не само от холоморфната кривина, от неговото анулиране не можем да направим съществени изводи за многообразието.

В [50] Тричери и Ванхеке въвеждат тензор на Бохнер за почти Ермитови многообразия, като използват друг подход, който води до обобщение на тензора на Бохнер с много по-сложна структура, но построен директно върху тензора на кривина R и чието анулиране дава конкретен, макар и доста сложен израз за R.

Именно, нека V е $2n$-мерно векторно пространство с положително дефинитна метрика и комплексна структура J. С $\mathfrak{R}(V)$ се означава пространството на всички LC-тензори над V, като поради наличието на метрика всеки такъв тензор може да се разглежда като тензор от тип (0,4) или от тип (1,3). На всеки LC-тензор R се съпоставят два тензора от тип (0,2), свързани с двете съществено различни следи на

R. По-точно, ако $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ е ортонормирана база на V, разглеждат се тензорът на Ричи $S(R)$, дефиниран с

$$S(R)(x,y) = \sum_{i=1}^{2n} R(x, e_i, e_i, y)$$

и $*$-тензорът на Ричи $S^*(R)$, дефиниран с

$$S^*(R)(x,y) = \sum_{i=1}^{2n} R(x, e_i, Je_i, Jy) \ .$$

Да отбележим специално, че докато $S(R)$ е класическият тензор на Ричи, който се дефинира за LC-тензори над произволно векторно пространство с дефинитна метрика, вторият „тензор на Ричи“ $S^*(R)$ се появява тук поради наличието на комплексната структура и естествено появилата се втора следа на LC-тензора R. Всъщност тензорът $S^*(R)$ може да се дефинира и като

$$S^*(R)(x,y) = \sum_{i=1}^{2n} R^*(x, e_i, e_i, y) \ ,$$

където

$$R^*(x,y,z,u) = R(x,y,Jz,Ju) \ .$$

С други думи $S^*(R)$ е обичайната „следа на Ричи“, но за R^*. Поради това имаме основание да го означаваме и $S(R^*)$, като не забравяме, че R^* не е LC-тензор.

Тензорът на Ричи е разбира се симетричен, но не е хибриден. От своя страна $S^*(R)$ не е нито симетричен, нито хибриден, но има свойството

$$S^*(R)(x,y) = S^*(R)(Jy, Jx) \ . \tag{6.1}$$

Вследствие наличието на два тензора на Ричи тук има и две скаларни кривини – обичайната скаларна кривина $\tau(R)$ и $*$-скаларната кривина $\tau^*(R)$:

$$\tau(R)(p) = \sum_{i=1}^{2n} S(R)(e_i, e_i) \ , \qquad \tau^*(R)(p) = \sum_{i=1}^{2n} S^*(R)(e_i, e_i) \ .$$

След изучаване на свойствата на тензорите $R \in \mathfrak{R}(V)$ и съответните тензори на Ричи $S(R)$ и $S(R^*)$, пространството $\mathfrak{R}(V)$ се разлага на 10 неразложими, взаимно ортогонални (спрямо естествено дефинираната в него метрика) и инвариантни под действието на унитарната група $U(n)$ компоненти. Директната сума на четири от тези компоненти се оказва *Бохнеровата компонента* $\mathfrak{R}_B(V)$, т.е. онази компонента, която се състои от тензорите $R \in \mathfrak{R}(V)$, за които $S(R) = S^*(R) = 0$. Всеки тензор в $\mathfrak{R}_B(V)$ се нарича *тензор на Бохнер*. Тази дефиниция е в пълен синхрон с подобен подход за въвеждане на тензор на Вайл за Риманово многообразие и тензор на Бохнер за Келерово многообразие. Тензорът на Бохнер за R (при $n \geq 3$) има вида

$$\begin{aligned} B(R) = R - \left\{ \frac{1}{16(n+2)}(\varphi+\psi)(S+3S^*) + \frac{1}{16(n-2)}(3\varphi-\psi)(S-S^*) \right\}(R+\overline{R}) \\ - \left\{ \frac{1}{4(n+1)}\psi(S^*) + \frac{1}{4(n-1)}\varphi(S) \right\}(R-\overline{R}) \\ + \frac{\tau(R)+3\tau^*(R)}{16(n+1)(n+2)}(\pi_1+\pi_2) + \frac{\tau(R)-\tau^*(R)}{16(n-1)(n-2)}(3\pi_1-\pi_2) \ , \end{aligned}$$

където

$$\overline{R}(x,y,z,u) = R(Jx,Jy,Jz,Ju) \ .$$

По естествен начин тази дефиниция на тензор на Бохнер се пренася за почти Ермитови многообразия. Навсякъде нататък този тензор ще означаваме $B(R)$, за да го различаваме от класическия тензор на Бохнер B и от обобщения тензор на Бохнер $B(HR)$. Лесно се вижда, че когато многообразието е Келерово, тези три тензора съвпадат. Важно е да отбележим, че подобно на тензора на Вайл, $B(R)$ е конформно инвариантен [50].

Сега ще покажем някои геометрични характеристики на въведения тензор на Бохнер $B(R)$. Първо ще докажем едно твърдение за връзката между различни кривини на антихоломорфни площадки.

За произволно почти Ермитово многообразие освен секционната кривина $K(x,y)$ на една площадка $\alpha = span\{x,y\}$ ($|x| = |y| = 1, x \perp y$) можем да разглеждаме и други кривини. Първата от тях (която се появява и при всяко Риманово многообразие) е

$$S(R)(x,x) + S(R)(y,y) \ .$$

Действително, директно се проверява, че горното число не зависи от базиса $\{x,y\}$ на площадката и значи имаме право да разглеждаме това число като кривина. Естествено е да наричаме тази кривина „кривина относно тензора на Ричи $S(R)$“. Но за почти Ермитово многообразие можем да разгледаме и две други кривини. Именно, тъй като $S(R)$ не е хибриден, числото

$$S(\overline{R})(x,x) + S(\overline{R})(y,y)$$

е различно от горната „кривина на Ричи", при това също не зависи от базиса $\{x,y\}$ на площадката и значи имаме право да разглеждаме и това число като кривина. Да забележим, че е в сила

$$S(R)(Jx,Jx) + S(R)(Jy,Jy) = S(\overline{R})(x,x) + S(\overline{R})(y,y)\ . \tag{6.2}$$

От друга страна можем да разгледаме и кривината

$$S^*(R)(x,x) + S^*(R)(y,y)$$

относно втория тензор на Ричи $S^*(R)$. При това, поради (6.1) е в сила

$$S^*(R)(x,x) = S^*(R)(Jx,Jx),$$

така че не е необходимо да се разглежда аналог на (6.2) относно $S^*(R)$. Най-общата линейна връзка между горните кривини има вида

$$\begin{aligned} K(x,y) + \mu\big(S(R)(x,x) + S(R)(y,y)\big) + \nu\big(S(R)(Jx,Jx) + S(R)(Jy,Jy)\big)\\ +\theta\big(S^*(R)(x,x) + S^*(R)(y,y)\big) = c(p)\ . \end{aligned} \tag{6.3}$$

За тази линейна връзка е в сила

Теорема 6.1. *(Касабов [35]) Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n > 2$, такова че за всяка точка $p \in M$ и за всяка антихоломорфна площадка $\alpha = span\{x,y\}$ $(|x| = |y| = 1, x \perp y)$ в T_pM е в сила линейна връзка (6.3), $(\mu,\nu,\theta) \neq (0,0,0)$. Тогава M е с нулев тензор на Бохнер $B(R)$.*

В доказателството ще използваме следните помощни твърдения:

Лема 6.2. *(Ганчев [12]) Нека T е LC-тензор над T_pM със свойствата:*

а) $T(x,Jx,Jx,x) = 0$ за всеки вектор $x \in T_pM$;

б) $T(x,y,y,x) = 0$ за произволни $x,y \in T_pM$, $x \perp y, Jy$;

в) $T(x,y,z,u) = T(Jx,Jy,Jz,Ju)$ за произволни $x,y,z,u \in T_pM$.

Тогава $T = 0$.

Лема 6.3. *(Ганчев [12]) Нека T е LC-тензор над T_pM със свойствата:*

а) $T(x,Jx,Jx,x)=0$ *за всеки вектор* $x\in T_pM$;

б) $T(x,y,y,x)=0$ *за произволни* $x,y\in T_pM$, $x\perp y,Jy$;

в) $T(x,Jx,y,x)=0$ *за произволни* $x,y\in T_pM$, $x\perp y,Jy$.

Тогава $T=0$.

Ще използваме и че както в (4.1) имаме

$$\sum_{i=1}^{2n} S(R)(e_i,Je_i)=0\ . \tag{6.4}$$

Аналогично равенство е в сила и за тензора $S^*(R)$:

$$\sum_{i=1}^{2n} S^*(R)(e_i,Je_i)=0\ , \tag{6.5}$$

което следва от (6.1). Да обърнем внимание още, че от дефиницията на тензора $S^*(R)$ и първото тъждество на Бианки лесно се получава

$$S^*(R)(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}R(x,Jy,Je_i,e_i)\ . \tag{6.6}$$

Твърдението на Теорема 6.1 е непосредствено следствие от следващите две леми.

Лема 6.4. *В сила е*

$$\begin{aligned}R+\overline{R}=&\left\{\frac{1}{8(n+2)}(\varphi+\psi)(S+3S^*)+\frac{1}{8(n-2)}(3\varphi-\psi)(S-S^*)\right\}(R+\overline{R})\\ &-\frac{\tau(R)+3\tau^*(R)}{8(n+1)(n+2)}(\pi_1+\pi_2)-\frac{\tau(R)-\tau^*(R)}{8(n-1)(n-2)}(3\pi_1-\pi_2)\ .\end{aligned}$$

Доказателство. Означаваме

$$\begin{aligned}T=R+\overline{R}-&\left\{\frac{1}{8(n+2)}(\varphi+\psi)(S+3S^*)+\frac{1}{8(n-2)}(3\varphi-\psi)(S-S^*)\right\}(R+\overline{R})\\ &+\frac{\tau(R)+3\tau^*(R)}{8(n+1)(n+2)}(\pi_1+\pi_2)+\frac{\tau(R)-\tau^*(R)}{8(n-1)(n-2)}(3\pi_1-\pi_2)\ .\end{aligned}$$

Ще покажем, че този тензор изпълнява условията на Лема 6.2 и следователно е тъждествено нула.

Нека $x, y \in T_pM$, $x \perp y, Jy$, $|x| = |y| = 1$. В (6.3) заместваме

$$x \longrightarrow \frac{x + ty}{\sqrt{1+t^2}}\ , \qquad y \longrightarrow \frac{tJx - Jy}{\sqrt{1+t^2}}$$

за произволно реално число t. След преобразуване на резултата и отделяне на коефициента пред t^2, намираме

$$\begin{aligned} H(x) + H(y) - 2R(x, Jy, Jx, y) - 2R(x, Jx, Jy, y) \\ +(\mu+\nu)\big\{S(R+\overline{R})(x,x) + S(R+\overline{R})(y,y)\big\} \\ +2\theta\big\{S^*(R)(x,x) + S^*(R)(y,y)\big\} \quad = \quad 2c(p)\,. \end{aligned}$$

От друга страна, ако в (6.3) заместим двойката $\{x, y\}$ с $\{x, Jy\}$, или $\{Jx, y\}$, получаваме съответно

$$\begin{aligned} K(x, Jy) + \mu\big(S(R)(x,x) + S(R)(Jy,Jy)\big) + \nu\big(S(R)(Jx,Jx) + S(R)(y,y)\big) \\ +\theta\big(S^*(R)(x,x) + S^*(R)(y,y)\big) = c(p)\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(Jx, y) + \mu\big(S(R)(Jx,Jx) + S(R)(y,y)\big) + \nu\big(S(R)(x,x) + S(R)(Jy,Jy)\big) \\ +\theta\big(S^*(R)(x,x) + S^*(R)(y,y)\big) = c(p)\ . \end{aligned}$$

От последните три равенства и (6.2) следва

$$H(x) + H(y) = 2R(x, Jy, Jx, y) + 2R(x, Jx, Jy, y) + K(x, Jy) + K(Jx, y)\ .$$

Нека $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ е ортонормирана база на T_pM, такава че $e_1 = x, e_2 = Jx$. В горното равенство полагаме $y = e_i$ $(i > 2)$ и след сумиране получаваме

$$2(n+2)H(x) + \sum_{i=1}^{2n} H(e_i) = S(R+\overline{R})(x,x) + 6S^*(R)(x,x)\ ,$$

откъдето

$$\sum_{i=1}^{2n} H(e_i) = \frac{(\tau + 3\tau^*)(R)}{2(n+1)}\ .$$

От последните две равенства намираме

$$H(x) = \frac{1}{2(n+2)}(S + 3S^*)(R+\overline{R})(x,x) - \frac{(\tau+3\tau^*)(R)}{4(n+1)(n+2)}\ . \tag{6.7}$$

Съгласно (6.3)

$$\begin{aligned} (R+\overline{R})(x,y,y,x) + (\mu+\nu)\big\{S(R+\overline{R})(x,x) + S(R+\overline{R})(y,y)\big\} \\ +2\,\theta\{S^*(R)(x,x) + S^*(R)(y,y)\} = 2c(p)\ . \end{aligned} \tag{6.8}$$

Тъй като x и y са произволни единични вектори с $x \perp y, Jy$, оттук с използване на (6.7) получаваме последователно

$$c(p) = \left(\frac{\mu+\nu}{n} + \frac{2n+1}{8n(n^2-1)} \right) \tau(R) + \left(\frac{\theta}{n} - \frac{3}{8n(n^2-1)} \right) \tau^*(R) \ ,$$

$$\begin{aligned} (\mu+\nu)S(R+\overline{R})(x,x) + 2\theta S^*(R)(x,x) &= \frac{1}{n^2-4}\big\{3S^*(R)(x,x) - \frac{n+1}{2}S(R+\overline{R})(x,x)\big\} \\ + \frac{1}{n}\big\{(\mu+\nu)\tau(R) + \theta\tau^*(R)\big\} &- \frac{1}{2n(n^2-4)}\big\{3\tau^*(R) - (n+1)\tau(R)\big\} \ . \end{aligned}$$

От последните две равенства и (6.8) можем да извлечем

$$\begin{aligned} (R+\overline{R})(x,y,y,x) = \frac{n+1}{2(n^2-4)}&\big\{S(R+\overline{R})(x,x) + S(R+\overline{R})(y,y)\big\} \\ &- \frac{3}{n^2-4}\big\{S^*(R)(x,x) + S^*(R)(y,y)\big\} \\ - \frac{2n^2+3n+4}{4(n^2-1)(n^2-4)}\tau(R) &+ \frac{9n}{4(n^2-1)(n^2-4)}\tau^*(R) \ . \end{aligned}$$

Да забележим, че последното се записва още във вида

$$T(x,y,y,x) = 0 \ ,$$

а от друга страна (6.7) се записва във вида

$$T(x,Jx,Jx,x) = 0 \ .$$

Тъй като от дефиницията на тензора T директно имаме

$$T(x,y,z,u) = T(Jx,Jy,Jz,Ju) \ ,$$

то от Лема 6.2 получаваме $T = 0$, с което твърдението е доказано. □

Лема 6.5. *В сила е*

$$R - \overline{R} = \left\{ \frac{1}{2(n-1)}\varphi(S) + \frac{1}{2(n+1)}\psi(S^*) \right\}(R - \overline{R}) \ .$$

Доказателство. Означаваме

$$T = R - \overline{R} - \left\{ \frac{1}{2(n-1)}\varphi(S) + \frac{1}{2(n+1)}\psi(S^*) \right\}(R - \overline{R}) \ .$$

Ще видим, че този тензор изпълнява условията на Лема 6.3. От дефиницията на T директно пресмятаме

$$T(x, Jx, Jx, x) = 0 \tag{6.9}$$

за произволен вектор $x \in T_pM$. От друга страна съгласно (6.3) за произволни единични вектори $x, y \in T_pM$, за които $x \perp y, Jy$, имаме

$$K(x,y) - K(Jx,Jy) + (\mu - \nu)\big\{S(R - \overline{R})(x,x) + S(R - \overline{R})(y,y)\big\} = 0 \ .$$

Нека $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ е ортонормирана база на T_pM, такава че $e_1 = x, e_2 = Jx$. В горното равенство полагаме $y = e_i$ $(i > 2)$ и след сумиране получаваме

$$(\mu - \nu)S(R - \overline{R})(x,x) = -\frac{1}{2(n-1)}S(R - \overline{R})(x,x) \ ,$$

откъдето

$$K(x,y) - K(Jx,Jy) = \frac{1}{2(n-1)}\big\{S(R - \overline{R})(x,x) + S(R - \overline{R})(y,y)\big\} \ .$$

Лесно се проверява, че последното равенство се записва още във вида

$$T(x, y, y, x) = 0 \tag{6.10}$$

за произволни единични вектори $x, y \in T_pM$, за които $x \perp y, Jy$. Оттук за такива вектори x, y и за произволно реално число t е в сила

$$T(x + tJy, tJx + y, tJx + y, x + tJy) = 0 \ ,$$

което влече

$$T(x, Jx, y, x) + T(x, y, y, Jy) = 0 \ . \tag{6.11}$$

Нека $z \in T_pM$ е единичен вектор, такъв че $z \perp x, Jx, y, Jy$. Съгласно (6.10)

$$T(x, y + tz, y + tz, x) = 0 \ ,$$

откъдето

$$T(x, y, z, x) = 0 \ .$$

Тук заместваме (x, y, z) с $(x + tz, y, tJx - Jz)$ и отделяме коефициента пред t^1:

$$T(x, Jx, y, x) = T(x, y, Jz, z) + T(x, Jz, y, z) \ .$$

Нека $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ е ортонормирана база на T_pM, такава че $e_1 = x$, $e_2 = Jx$, $e_3 = y$, $e_4 = Jy$. Полагаме в горното равенство $z = e_i$ $(i > 4)$ и сумираме по i, като използваме (6.6) и (6.11):

$$2(n + 1)T(x, Jx, y, x) = -3S^*(T)(x, Jy) \ . \tag{6.12}$$

От друга страна, от дефиницията на тензора T имаме

$$\begin{aligned} S^*(T)(x, y) &= \sum_{i=1}^{2n} T(x, e_i, Je_i, Jy) = S^*(R - \overline{R})(x, y) \\ &- \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{2n} \big\{ g(x, Jy)S(R - \overline{R})(e_i, Je_i) - g(x, Je_i)S(R - \overline{R})(e_i, Jy) \\ &\qquad + g(e_i, Je_i)S(R - \overline{R})(x, Jy) - g(e_i, Jy)S(R - \overline{R})(x, Je_i) \ \big\} \\ &- \frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=1}^{2n} \big\{ g(x, y)S^*(R - \overline{R})(e_i, e_i) - g(x, e_i)S^*(R - \overline{R})(e_i, y) \\ &\qquad + \ g(e_i, e_i)S^*(R - \overline{R})(x, y) - g(e_i, y)S^*(R - \overline{R})(x, e_i) \\ &\qquad + 2g(x, Je_i)S^*(R - \overline{R})(Je_i, y) + 2g(Je_i, y)S^*(R - \overline{R})(x, Je_i) \big\} \ . \end{aligned}$$

Оттук, като вземем предвид (6.4) и (6.5), получаваме

$$S^*(T)(x, y) = 0 \ .$$

От последното равенство, (6.9), (6.10), (6.12) и Лема 6.3 следва $T = 0$, което доказва твърдението. □

Както казахме, Теорема 6.1 следва директно от Леми 6.4 и 6.5.

Забележка. Доказателствата на Леми 6.4 и 6.5 са инспирирани от разглежданията в [15].

Следствие 6.6. *Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n > 2$. Тогава M е с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина ν точно когато е с нулев тензор на Бохнер $B(R)$ и тензорът $2(n + 1)S(R) - 3S^*(R + \overline{R})$ е пропорционален на метричния тензор:*

$$2(n + 1)S(R) - 3S^*(R + \overline{R}) = \frac{1}{n}\big\{(n + 1)\tau(R) - 3\tau^*(R)\big\}\, g \ . \tag{6.13}$$

Функцията ν има вида

$$\nu = \frac{(2n+1)\tau(R) - 3\tau^*(R)}{8n(n^2-1)} \ .$$

Доказателство. Нека M е с точково постоянна антихоломорфна кривина. Ако x, y са единични вектори в T_pM, $x \perp y, Jy$, от

$$R(x,y,y,x) = \nu(p)$$

лесно следва

$$S(R)(x,x) - H(x) = 2(n-1)\nu(p) \ ,$$

откъдето $S(R)(x,x) = S(R)(Jx,Jx)$, т.е. тензорът на Ричи е хибриден. Да забележим, че поради $K(x,y) = \nu(p)$, условията на Теорема 6.1 са удовлетворени и следователно $B(R) = 0$. Оттук и $S(R)(x,x) = S(R)(Jx,Jx)$ намираме

$$\begin{aligned} \nu(p) &= \frac{1}{2(n^2-4)}\big\{((n+1)S - 3S^*)(R)(x,x) + ((n+1)S - 3S^*)(R)(y,y)\big\} \\ &- \frac{1}{8(n^2-1)(n^2-4)}\big\{(2n^2+3n+4)\tau(R) - 9n\tau^*(R)\big\} \ . \end{aligned}$$

Тъй като $n > 2$, от последното получаваме

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n^2-4)}((n+1)S - 3S^*)(R)(x,x) \\ &-\frac{1}{8(n^2-1)(n^2-4)}\big\{(2n^2+3n+4)\tau(R) - 9n\tau^*(R)\big\} = \nu(p) \end{aligned} \tag{6.14}$$

и следователно $2(n+1)S(R) - 3S^*(R+\overline{R})$ е пропорционален на метричния тензор. В последното равенство полагаме $x = e_i$, където $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ е ортонормирана база на T_pM и сумираме:

$$\nu = \frac{(2n+1)\tau(R) - 3\tau^*(R)}{8n(n^2-1)} \ . \tag{6.15}$$

От (6.14) и (6.15) получаваме (6.13).

Обратното твърдение е лесна проверка. □

С използване на Теорема 6.1 и Следствие 6.6 лесно доказваме

Следствие 6.7. *Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n > 2$, с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина ν. Тогава тензорът на кривина за M има вида*

$$R = \frac{1}{2(n+1)}\psi(S^*(R)) + \nu\pi_1 - \frac{\tau^*(R) + 2(n+1)\nu}{2(n+1)(2n+1)}\pi_2 \ .$$

Забележка 1. Следствия 6.6 и 6.7 са еквивалентни съответно на Твърдение 3.6 и Теорема 3.1 от [15], получени след изследване на въведения там антихоломорфен оператор.

Забележка 2. Както видяхме в доказателството на Следствие 6.6, тензорът на Ричи за почти Ермитиво многообразие с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина е хибриден [43].

Както казахме в секция 3, една хубава геометрична характеристика на тензора на Бохнер за Келерово многообразие (и аналог на съответното твърдение за Риманови многообразия) се дава от Ванхеке и Яно с еквивалентните твърдения в Теорема 3.1. За произволно почти Ермитово многообразие и тензора на Бохнер-Тричери-Ванхеке $B(R)$ еквивалентността на а) и б) от тази теорема е обобщена от Ганчев в [14]. Сега ще получим обобщение на цялата Теорема 3.1 за почти Ермитови многообразия, с което и по-пълна геометрична характеристика на $B(R)$.

Теорема 6.8. *(Касабов [35]) Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n > 3$. Следните твърдения са еквивалентни:*

а) M е с нулев тензор на Бохнер;

б) за всяка точка $p \in M$ и за всеки ортогонален базис $\{x, y, z, u\}$ на четиримерно антихоломорфно подпространство на T_pM, е в сила $R(x, y, z, u) = 0$;

в) за всяка точка $p \in M$ и за всеки ортонормиран базис $\{x, y, z, u\}$ на четиримерно антихоломорфно подпространство на T_pM, е в сила

$$K(x, y) + K(z, u) = K(x, u) + K(y, z) \ . \tag{6.16}$$

Доказателство. Да вземем ортонормирана четворка вектори x, y, z, u, образуващи базис на антихоломорфно подпространство на T_pM.

Импликацията а) $\Longrightarrow$ б) е елементарна проверка.

б) $\Longrightarrow$ в) : Тъй като $\{x, y + z, y - z, u\}$ също е базис на антихоломорфно подпространство, в сила е

$$R(x, y + z, y - z, u) = 0 \ ,$$

откъдето

$$R(x, y, y, u) = R(x, z, z, u) \ . \tag{6.17}$$

Тук заместваме двойката (x,u) с $(x+u, x-u)$ и след използване на (6.17), получаваме (6.16).

в) $\Longrightarrow$ а) : Нека t е произволно реално число. Съгласно (6.16)

$$K\Big(\frac{x+ty}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{tx-y}{\sqrt{1+t^2}}\Big) + K(z,u) = K\Big(\frac{x+ty}{\sqrt{1+t^2}}, z\Big) + K\Big(\frac{tx-y}{\sqrt{1+t^2}}, u\Big) \ ,$$

откъдето след преобразуване и отделяне на коефициента пред t^2 намираме

$$H(x) + H(y) = 2R(x,Jx,Jy,y) + 2R(x,Jy,Jx,y) + K(x,Jy) + K(Jx,y) \ .$$

Нека $\{e_1,...,e_{2n}\}$ е ортонормиран базис на T_pM, такъв че $e_1 = x, e_2 = Jx$. В горното равенство полагаме $y = e_i$ и събираме за $i = 3,...,2n$:

$$2(n+2)H(x) + \sum_{i=1}^{2n} H(e_i) = (S+3S^*)(R+\overline{R})(x,x) \ ,$$

откъдето пресмятаме последователно

$$\sum_{i=1}^{n} H(e_i) = \frac{\tau(R)+3\tau^*(R)}{4(n+1)} \ , \tag{6.18}$$

$$H(x) = \frac{1}{2(n+2)}(S+3S^*)(R+\overline{R})(x,x) - \frac{\tau(R)+3\tau^*(R)}{4(n+1)(n+2)} \ . \tag{6.19}$$

Нека сега $\{e_1,...,e_n, Je_1,...,Je_n\}$ е адаптиран базис на T_pM, за който $e_1 = x$, $e_2 = y$. В (6.16) вземаме $(z,u) = (e_i, e_s)$ и $(z,u) = (e_i, Je_s)$ $(i \neq s)$ и събираме получените равенства за $s = 4,...,n$, $s \neq i$:

$$\begin{aligned}(2n-5)K(x,y) + S(R)(e_i,e_i) - H(e_i) - K(Jx,e_i) - K(Jy,e_i)\\ = (2n-5)K(x,e_i) + S(R)(y,y) - H(y) - K(Jx,y) - K(y,Je_i) \ .\end{aligned}$$

Събираме всички равенства от горния вид за $i = 3,...,n$ и към сумата прибавяме сумата от съответните равенства, в които e_i е заменено с Je_i:

$$\begin{aligned}(2n^2-8n+7)K(x,y) + K(Jx,Jy) + (n-2)\big\{K(Jx,y) + K(x,Jy)\big\}\\ +(n-1)\big\{H(x)+H(y)\big\}\\ = (n-2)\{S(R)(x,x) + S(R)(y,y)\} + S(R)(Jx,Jx) + S(R)(Jy,Jy)\\ -\frac{\tau(R)}{2} + \sum_{i=1}^{n} H(e_i) \ .\end{aligned} \tag{6.20}$$

В последното заменяме (x,y) с (Jx,Jy) и като комбинираме резултата с (6.20), получаваме

$$K(x,y)-K(Jx,Jy)=\frac{1}{2(n-1)}\big\{S(R-\overline{R})(x,x)+S(R-\overline{R})(y,y)\big\}\ ,$$

откъдето със смяна $y\to Jy$ имаме още

$$K(x,Jy)-K(Jx,y)=\frac{1}{2(n-1)}\big\{S(R-\overline{R})(x,x)+S(R-\overline{R})(Jy,Jy)\big\}\ .$$

От последните три равенства следва

$$\begin{aligned}(n-2)K(x,y)+K(x,Jy)+\frac{n-1}{2(n-2)}\big\{H(x)+H(y)\big\}\\
=\frac{1}{2}\big\{S\big(R+\frac{1}{n-2}\overline{R}\big)(x,x)+S\big(R+\frac{1}{n-2}\overline{R}\big)(y,y)\big\}\\
+\frac{1}{4(n-1)(n-2)}\big\{S(R-\overline{R})(x,x)+S(R-\overline{R})(y,y)\big\}\\
+\frac{1}{4(n-1)}\big\{S(R-\overline{R})(x,x)+S(R-\overline{R})(Jy,Jy)\big\}\\
-\frac{\tau(R)}{2}+\sum_{i=1}^{n}H(e_i)\ .\end{aligned}\tag{6.21}$$

Тук заменяме y с Jy и като комбинираме резултата с (6.21), намираме

$$K(x,y)-K(x,Jy)=\frac{1}{2(n-1)}S(R-\overline{R})(y,y)\ .$$

От последните две равенства, с използване на (6.18) и (6.19), получаваме

$$\begin{aligned}K(x,y)&=\frac{1}{2(n+2)}\big\{S(HR)(x,x)+S(HR)(y,y)\big\}\\
&+\frac{3}{16(n-2)}\big\{(S-S^*)(R+\overline{R})(x,x)+(S-S^*)(R+\overline{R})(y,y)\big\}\\
&+\frac{1}{4(n-1)}\big\{S(R-\overline{R})(x,x)+S(R-\overline{R})(y,y)\big\}\\
&-\frac{\tau(HR)}{4(n+1)(n+2)}-\frac{3(\tau(R)-\tau^*(R))}{16(n-1)(n-2)}\ .\end{aligned}$$

Сега твърдението следва от последното равенство и Теорема 6.1. □

7 Многообразия от конформен тип. Връзка между обобщения тензор на Бохнер и тензора на Бохнер-Тричери-Ванхеке

При наличието на две обобщения на тензора на Бохнер за почти Ермитови многообразия, естествен е въпросът за връзката между тях. Тук ще видим, че условието $B(R) = 0$ влече $B(HR) = 0$, както и ще изясним какво още трябва да се добави към анулирането на тензора $B(HR)$, за да се анулира и $B(R)$.

Въвеждането на обобщения тензор на Бохнер и тензора $B(R)$ е предшествано от изучаването на отклонението на тензора на кривина при почти Ермитови многообразия от Келеровото тъждество. В тази връзка се въвежда понятието *многообразие от постоянен тип* [51], [14] с условието за всяка точка $p \in M$ и всяка антихоломорфна площадка α в T_pM да е в сила

$$K(\alpha, p) - K^*(\alpha, p) = \lambda(p)\,,$$

където $K^*(\alpha)$ е секционната кривина спрямо тензора $R^*(x, y, z, u) = R(x, y, Jz, Ju)$. Естествено обобщение на това понятие се дава със следната дефиниция: казваме, че многообразието (при $\dim M \geq 8$) е от конформен тип [14], когато за всяка ортогонална четворка вектори (x, y, z, u), базис на 4-мерно антихоломорфно подпространство на M, е в сила

$$R(x, y, z, u) - R^*(x, y, z, u) = 0. \tag{7.1}$$

Забележка. Всъщност понятието многообразие от конформен тип може да се дефинира и за $n = 3$ [15].

Именно с понятието многообразие от конформен тип се дава точната връзка между обобщения тензор на Бохнер и тензора на Бохнер на Тричери-Ванхеке. Тази връзка е съдържанието на следващата теорема, като даденото тук доказателство е различно от оригиналното от [14].

Теорема 7.1. *(Ганчев, [14]). Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n > 3$. Еквивалентни са твърденията:*

а) M е с нулев тензор на Бохнер $B(R)$;

б) M е от конформен тип и с нулев обобщен тензор на Бохнер $B(HR)$.

Доказателство. **а) $\Longrightarrow$ б):** Нека M е с нулев обобщен тензор на Бохнер, а (x, y, z, u) е четворка взаимно ортогонални вектори, базис на 4-мерно антихоломорфно допирателно подпространство на M. Съгласно Теорема 5.1 е в сила $HR(x, y, z, u) = 0$, т.е.

$$\begin{aligned}
&3\big\{R(x, y, z, u) + R(x, y, Jz, Ju)\\
&+R(Jx, Jy, z, u) + R(Jx, Jy, Jz, Ju)\big\}\\
&+R(Jx, Jz, y, u) - R(Jy, Jz, x, u)\\
&+R(x, z, Jy, Ju) - R(y, z, Jx, Ju) + R(y, Jz, Jx, u)\\
&-R(x, Jz, Jy, u) + R(Jy, z, x, Ju) - R(Jx, z, y, Ju) = 0\ .
\end{aligned}$$

Тъй като M е от конформен тип, оттук и (7.1), с използване свойствата на LC-тензора R, получаваме $R(x, y, z, u) = 0$ и съгласно Теорема 6.8 многообразието M е с нулев тензор на Бохнер $B(R)$.

б) $\Longrightarrow$ а) се доказва аналогично. $\square$

Забележка 1. Директната проверка показва, че условието $B(R) = 0$ винаги влече $B(HR) = 0$ дори за $n \geq 3$.

От самата дефиниция на обобщения тензор на Бохнер $B(HR)$ се вижда, че теоремите, които са в сила за тензора на Бохнер за Келерови многообразия са в сила със съответните формални промени и за почти Ермитови многообразия и $B(HR)$. От друга страна в секция 6 стана ясно, че тензорът на Бохнер на Тричери – Ванхеке е свързан с антихоломорфните подпространства. Много теореми, в сила за Келерови мноообразия и свързани с поведението на самия тензор на кривина върху антихоломорфни площадки, имат почти дословни аналози за почти Ермитови многообразия и тензора на Бохнер на Тричери – Ванхеке. Сега ще покажем, че има и изключения и може да се наложи да се направят някои промени в условията.

Както видяхме в секция 3, Келеровите многообразия с нулев тензор на Бохнер се характеризират с условието кривините на максимално-мерните антихоломорфни подпространства да не зависят от тези подпространства, а само от съответната точка на многообразието (Теорема 3.5). Да видим как може да се получи съответен аналог на това твърдение за почти Ермитови многообразия и как той ще е свързан с обобщения тензор на Бохнер и с $B(R)$.

Теорема 7.2. *Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n \geq 2$, такова че за всяка точка $p \in M$ кривината на произволно n-мерно антихоломорфно подпространство E^n на T_pM не зависи от E^n, а е функция само на p: $K(E^n, p) = c(p)$. Тогава M е с нулев обобщен тензор на Бохнер.*

Доказателство. Нека $\{e_1, Je_1, ..., e_n, Je_n\}$ е произволен адаптиран базис на T_pM. Записваме тензора на Ричи както в [13]

$$S(R)(e_i, e_i) = H(e_i) + \sum_{s=1,...,n; s\neq i} \big\{K(e_i, e_s) + K(e_i, Je_s)\big\}$$

$$S(R)(Je_i, Je_i) = H(e_i) + \sum_{s=1,...,n; s\neq i} \big\{K(Je_i, e_s) + K(Je_i, Je_s)\big\}$$

Оттук със сумиране по i получаваме

$$\tau(R)(p) = 2\sum_{i=1}^{n} H(e_i) + \sum_{i,s=1,...,n; i\neq s} \big\{K(e_i, e_s) + K(e_i, Je_s) + K(Je_i, e_s) + K(Je_i, Je_s)\big\}.$$

Може да се види, че втората сума в последното равенство се изразява със сумата от кривините на всичките 2^n на брой антихоломорфни подпространства на T_pM, образувани от избрания базис. Точното сравняване показва, че е в сила

$$2\sum_{i=1}^{n} H(e_i) = 4c(p) - \tau(R)(p)$$

и следователно $\sum_{i=1}^{n} H(e_i)$ не зависи от избрания адаптиран базис. Оттук, съгласно аналога на Теорема 3.4 за почти Ермитови могообразия, M е с нулев обобщен тензор на Бохнер. □

Следствие 7.3. *Нека M е $2n$-мерно ($n > 3$) AH_3-многообразие. Еквивалентни са твърденията:*

а) M е от конформен тип и за всяка точка $p \in M$ кривината на произволно n-мерно антихоломорфно подпространство E^n на T_pM не зависи от E^n, а е функция само на p;

б) M е от конформен тип и с нулев обобщен тензор на Бохнер;

в) M е с нулев тензор на Бохнер $B(R)$.

Доказателство. Импликацията а) $\Longrightarrow$ б) е доказана (дори за AH-многообразия) в Теорема 7.2, а б) $\Longrightarrow$ в) - в Теорема 7.1. От друга страна директната проверка показва, че поради $M \in AH_3$ условието в) влече а). $\square$

Да забележим обаче, че ако многообразието не принадлежи на класа AH_3, тензорът на Ричи не е хибриден и от $B(R) = 0$ не следва условие а) от горното следствие. От друга страна, аналогично на Теорема 7.2 е в сила

Теорема 7.4. *Нека M е $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n \geq 2$, такова че за всяка точка $p \in M$ и за произволно n-мерно антихоломорфно подпространство E^n на T_pM сумата*

$$K(E^n, p) + K(JE^n, p)$$

е функция само на p. Тогава M е с нулев обобщен тензор на Бохнер.

Доказателството на последното твърдение е аналогично на това на Теорема 7.2. Сега можем да формулираме аналогичен резултат на Следствие 7.3 за произволно почти Ермитово многообразие:

Следствие 7.5. *Нека M е $2n$-мерно ($n > 3$) почти Ермитово многообразие от конформен тип. Еквивалентни са твърденията:*

а) за всяка точка $p \in M$ кривината на произволно n-мерно антихоломорфно подпространство E^n на T_pM сумата $K(E^n, p) + K(JE^n, p)$ не зависи от E^n, а е функция само на p;

б) M е с нулев обобщен тензор на Бохнер;

в) M е с нулев тензор на Бохнер $B(R)$.

Забележка. В частния случай на AH_3-многообразие от постоянен тип еквивалентността на а) и б) от Следствие 7.5 е доказана в [13].

8 Приблизително Келерови многообразия с нулев тензор на Бохнер

В тази секция ще получим две класификационни теореми: за не-Келерови приблизително Келерови многообразия с нулев тензор на Бохнер $B(R)$ и като следствие

- за приблизително Келерови многообразия с нулев тензор на Бохнер $B(R)$ и постоянна скаларна кривина. Специално подчертаваме, че когато многообразието не е Келерово, не е необходимо да предполагаме, че е с постоянна скаларна кривина.

Ще припомним, че едно почти Ермитово многообразие се нарича приблизително Келерово, когато ковариантната производна на почти комплексната структура има свойството

$$(\nabla_X J)X = 0$$

или все едно

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0 \ . \tag{8.1}$$

Да припомним още, че всяко приблизително Келерово многообразие е и AH_3-многообразие. В частност оттук следва, че тензорът на Ричи $S(R)$ е хибриден, а тензорът $S^*(R)$ е симетричен. Тъй като нататък тензорите на Ричи ще са построени най-често върху тензора на кривина, за краткост когато няма опасност от недоразумение, ще отбелязваме тези тензори с S и S^*, съответно. От условието за AH_3-многообразие следва, че неговият тензор на Бохнер приема вида

$$\begin{aligned} B(R) = R - &\left\{ \frac{1}{8(n+2)}(\varphi+\psi)(S+3S^*) + \frac{1}{8(n-2)}(3\varphi-\psi)(S-S^*) \right\} \\ &+ \frac{\tau(R)+3\tau^*(R)}{16(n+1)(n+2)}(\pi_1+\pi_2) + \frac{\tau(R)-\tau^*(R)}{16(n-1)(n-2)}(3\pi_1-\pi_2) \ . \end{aligned}$$

За приблизително Келерови многообразия са в сила свойствата [21], [23], [53]:

$$R(X,Y,Z,U) - R(X,Y,JZ,JU) = -g((\nabla_X J)Y, (\nabla_Z J)U), \tag{8.2}$$

$$2g((\nabla_X(\nabla_Y J))Z,U) = R(X,JY,U,Z) + R(X,JU,Z,Y) + R(X,JZ,Y,U), \tag{8.3}$$

$$2(\nabla_X(S-S^*))(Y,Z) = (S-S^*)((\nabla_X J)Y, JZ) + (S-S^*)(JY, (\nabla_X J)Z), \tag{8.4}$$

$$X(\tau(R) - \tau^*(R)) = 0, \tag{8.5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2n} (S-S^*)(E_i,E_j)(S-5S^*)(E_i,E_j) = 0. \tag{8.6}$$

Тук X, Y, Z, U са произволни векторни полета, а $\{E_1, ..., E_{2n}\}$ е локална ортонормирана база на $\mathfrak{X}(M)$.

Ще използваме и следните непосредствени следствия от второто тъждество на Бианки:

$$\sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{E_i} R)(X, Y, Z, E_i) = (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z) \ , \tag{8.7}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{E_i} S)(X, E_i) = \frac{1}{2} X(\tau(R)) \ . \tag{8.8}$$

Лема 8.1. *(Касабов [28]) Нека M е $2n$-мерно приблизително Келерово многообразие, $n > 2$. Ако M е с нулев тензор на Бохнер $B(R)$, то тензорът $S - S^*$ е паралелен, т.е. $\nabla(S - S^*) = 0$.*

Доказателство. Нека $\{E_1, ..., E_{2n}\}$ е локална ортонормирана база на $\mathfrak{X}(M)$. С използване на (8.1) и (8.2) получаваме

$$\begin{aligned}
(S - S^*)(X, Y) &= \sum_{i=1}^{2n} \big(R(X, E_i, E_i, Y) - R(X, E_i, JE_i, JY) \big) \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} g((\nabla_X J)E_i, (\nabla_{E_i} J)Y) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} g((\nabla_X J)E_i, (\nabla_Y J)E_i),
\end{aligned}$$

т.е.

$$(S - S^*)(X, Y) = \sum_{i=1}^{2n} g((\nabla_X J)E_i, (\nabla_Y J)E_i) \ .$$

Оттук за ковариантната производна на $S - S^*$ следва

$$(\nabla_X (S - S^*))(Y, Y) = 2 \sum_{i=1}^{2n} g((\nabla_X (\nabla_Y J))E_i, (\nabla_Y J)E_i).$$

От последното равенство и (8.3) намираме

$$\begin{aligned}
(\nabla_X (S - S^*))(Y, Y) = \sum_{i=1}^{2n} \big\{ & R(X, JY, (\nabla_Y J)E_i, E_i) \\
&+ R(X, J(\nabla_Y J)E_i, E_i, Y) + R(X, JE_i, Y, (\nabla_Y J)E_i) \big\} \ .
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Израза в дясната страна на горното равенство ще пресметнем с използване на условието $B(R)=0$. Преди всичко да забележим, че за всеки хибриден тензор Q от тип (0,2), с използване на

$$(\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y \qquad g((\nabla_X J)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X J)Z)$$

(които са в сила за произволно почти Ермитово многообразие), лесно се доказват тъждествата

$$\sum_{i=1}^{2n} Q((\nabla_Y J)E_i, E_i) = 0 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{2n} Q((\nabla_Y J)E_i, JE_i) = 0 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{2n} g(Y, (\nabla_X J)E_i)Q(E_i, Z) = -Q((\nabla_X J)Y, Z) \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{2n} g(Y, E_i)Q((\nabla_X J)E_i, Z) = Q((\nabla_X J)Y, Z) \ .$$

В частност тези тъждества са в сила за всеки от тензорите g, S, S^*. Освен това за приблизително Келерово многообразие от последното равенство следва

$$\sum_{i=1}^{2n} g(X, E_i)Q((\nabla_X J)E_i, Y) = 0 \ .$$

И така, с използване на тези тъждества и $B(R)=0$ пресмятаме

$$\sum_{i=1}^{2n} R(X, JY, (\nabla_Y J)E_i, E_i) = \frac{1}{n-2}(S - S^*)((\nabla_Y J)X, JY) \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{2n} R(X, J(\nabla_Y J)E_i, E_i, Y) = \frac{1}{2(n-2)}(S - S^*)((\nabla_Y J)X, JY) \ .$$

Стойността на $R(X, JE_i, Y, (\nabla_Y J)E_i)$ можем да пресметнем по същия начин или с използване на горните две и първото тъждество на Бианки:

$$\sum_{i=1}^{2n} R(X, JE_i, Y, (\nabla_Y J)E_i) = \frac{1}{2(n-2)}(S - S^*)((\nabla_Y J)X, JY) \ .$$

Сега (8.9) приема вида

$$(\nabla_X(S-S^*))(Y,Y)=\frac{2}{n-2}(S-S^*)((\nabla_Y J)X,JY)\ .$$

Оттук, (8.1) и (8.4) получаваме

$$(\nabla_X(S-S^*))(Y,Y)=0\ .$$

Тъй като $S-S^*$ е симетричен тензор, ковариантната производна $(\nabla_X(S-S^*)(Y,Z)$ е симетрична по Y, Z и последното е еквивалентно на $\nabla(S-S^*)=0$. $\square$

С използване на Лема 8.1 ще докажем основния резултат в тази секция - класификационна теорема за не-Келерови, приблизително Келерови многообразия с нулев тензор на Бохнер:

Теорема 8.2. *(Касабов [28]) Нека M е $2n$-мерно не-Келерово приблизително Келерово многообразие, $n>2$. Ако M е с нулев тензор на Бохнер, то е локално изометрично на едно от следните многообразия:*

a) шестмерната сфера $\mathbb{S}^6$;

b) $\mathbb{CD}^1(-\mu)\times\mathbb{S}^6(\mu)$, където $\mathbb{C}^6(\mu)$, съотв. $\mathbb{CD}^1(-\mu)$, е шестмерната сфера с постоянна секционна кривина μ, съотв. едномерното комплексно хиперболично пространство с постоянна секционна кривина $(-\mu)$.

Доказателство. Съгласно Лема 8.1 тензорът $S-S^*$ е паралелен. Следователно над всяка неприводима компонента на M той е пропорционален на метричния тензор [8].

a) Нека M е неприводимо. Тогава

$$S-S^*=\frac{1}{2n}\{\tau(R)-\tau^*(R)\}g\ . \tag{8.10}$$

Оттук и (8.6) следва

$$(\tau(R)-\tau^*(R))(\tau(R)-5\tau^*(R))=0.$$

Да допуснем, че $\tau(R)(p)-\tau^*(R)(p)=0$ за някоя точка $p\in M$. Тъй като съгласно (8.5) функцията $\tau(R)-\tau^*(R)$ е константа, то $\tau(R)-\tau^*(R)=0$. Сега от $B(R)=0$ и (8.10) получаваме

$$R=\frac{1}{2(n+2)}(\varphi+\psi)(S)-\frac{\tau(R)}{4(n+1)(n+2)}(\pi_1+\pi_2).$$

От последното следва $R(X,Y,Z,U) = R(X,Y,JZ,JU)$ за произволни $X,Y,Z,U \in \mathfrak{X}(M)$, т.е. M е AH_1-многообразие, а тъй като е и NK, то е Келерово [20], което е противоречие. Следователно

$$\tau(R) - 5\tau^*(R) = 0. \tag{8.11}$$

Сега (8.5) влече, че $\tau(R)$ и $\tau^*(R)$ са глобални константи. От $B(R) = 0$ и равенства (8.10), (8.11) получаваме

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2(n+2)}(\varphi+\psi)(S) - \frac{(4n+3)\tau(R)}{10n(n+1)(n+2)}(\pi_1+\pi_2) \\ &+ \frac{\tau(R)}{20n(n-1)}(3\pi_1-\pi_2)\ . \end{aligned} \tag{8.12}$$

От (8.7), (8.8), (8.12) и $X(\tau(R)) = 0$ намираме

$$\begin{aligned} &(2n+3)\{(\nabla_X S)(Y,Y) - (\nabla_Y S)(X,Y)\} \\ &\qquad = 3(\nabla_{JY} S)(X,JY) + 3S((\nabla_Y J)X,JY)\ . \end{aligned} \tag{8.13}$$

Тъй като за приблизително Келерово многообразие

$$(\nabla_{JX} S)(X,JX) = -S(X,(\nabla_{JX} J)X) = 0\ ,$$

$$(\nabla_X S)(JX,JX) = (\nabla_X S)(X,X)\ ,$$

от (8.13) при $Y = JX$ следва $(\nabla_X S)(X,X) = 0$. В последното заменяме X с $X+Y$ и след опростяване получаваме

$$(\nabla_X S)(Y,Y) + 2(\nabla_Y S)(X,Y) = 0. \tag{8.14}$$

От (8.1), (8.13) и (8.14) извличаме $(\nabla_X S)(Y,Y) = 0$. Поради симетричността на тензора S това е еквивалентно на $\nabla S = 0$. Тъй като многообразието е неприводимо, оттук следва $S = \tau(R)g/(2n)$. Сега (8.12) приема вида

$$R = \frac{5n+1}{20n(n^2-1)}\tau(R)\pi_1 + \frac{n-3}{20n(n^2-1)}\tau(R)\pi_2\ .$$

Следователно M е с постоянна холоморфна секционна кривина. Тъй като M не е Келерово, то е локално изометрично на $\mathbb{S}^6$ [22].

б) Нека сега M е приводимо и за конкретност нека M локално е произведение $M_1(\lambda_1) \times \ldots \times M_k(\lambda_k)$, където $k > 1$ и $S - S^* = \lambda_i g$ над $M_i(\lambda_i)$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ за

$i \neq j$. Лесно се съобразява, че $M_i(\lambda_i)$ е приблизително Келерово многообразие за всяко $i = 1, ..., k$.

Да припомним, че от $B(R) = 0$ следва $B(HR) = 0$. Тогава съгласно Теорема 5.4 и Следствие 5.5 M или е с постоянна нулева холоморфна секционна кривина, или локално е произведение на две приблизително Келерови многообразия с точково постоянни холоморфни секционни кривини $-\mu(p)$ и $\mu(p)$, съответно, $\mu(p) > 0$.

Първият случай е невъзможен, защото M не е Келерово. Във втория случай съгласно [41] μ е константа. Следователно сега M локално е произведение на две приблизително Келерови многообразия с постоянни холоморфни секционни кривини. Тъй като многообразието не е Келерово, поне едно от тези две многообразия трябва да не е Келерово. Но съгласно [22] единственото не-Келерово приблизително Келерово многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина е $\mathbb{S}^6(\mu)$. Следователно M е локално изометрично на $\mathbb{CD}^k(-\mu) \times \mathbb{S}^6(\mu)$, $k + 3 = n$. Остава да се убедим, че при $k > 1$ това произведение не е с нулев тензор на Бохнер.

Наистина, нека $k > 1$. Да означим с R_1, R_2, R тензорите на кривина на $\mathbb{CD}^k(-\mu)$, $\mathbb{S}^6(\mu)$ и $\mathbb{CD}^k(-\mu)\times\mathbb{S}^6(\mu)$, съответно и с g_1, g_2, g съответните метрични тензори. Да припомним, че когато x_1, y_1, z_1, u_1 са вектори от допирателно пространство на $\mathbb{CD}^k(-\mu)$, а x_2, y_2, z_2, u_2 – от допирателно пространство на $\mathbb{S}^6(\mu)$, имаме

$$R(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2) = R_1(x_1, y_1, z_1, u_1) + R_2(x_2, y_2, z_2, u_2) \ .$$

От друга страна, тъй като $\mathbb{CD}^k(-\mu)$ е с постоянна холоморфна секционна кривина $-\mu$, а $\mathbb{S}^6(\mu)$ е с постоянна секционна кривина μ, в сила са

$$R_1(x_1, y_1, z_1, u_1) = -\frac{\mu}{4}\big(\pi_1 + \pi_2\big)(x_1, y_1, z_1, u_1) \ ,$$

$$R_2(x_2, y_2, z_2, u_2) = \mu\pi_1(x_2, y_2, z_2, u_2) \ .$$

Нека $\{x_1, y_1\}$ е ортонормирана база на антихоломорфна площадка над $\mathbb{CD}^k(-\mu)$, а $\{x_2, y_2\}$ е ортонормирана база на антихоломорфна площадка над $\mathbb{S}^6(\mu)$. Тогава векторите $x_1+x_2, y_1+y_2, x_1-x_2, y_1-y_2$ образуват ортонормирана база на антихоломорфна площадка над произведението. За тях имаме

$$\begin{aligned} &R(x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\ &\qquad = -\frac{\mu}{4}\big(\pi_1 + \pi_2\big)(x_1, y_1, x_1, y_1) + \mu\pi_1(x_2, y_2, x_2, y_2) = -\frac{3\mu}{4} \ , \end{aligned}$$

което не е нула. Следователно условие б) на Теорема 6.8 не е изпълнено, т.е. при $k > 1$ произведението $\mathbb{CD}^k(-\mu) \times \mathbb{S}^6(\mu)$ не е с нулев тензор на Бохнер. $\square$

Забележка. Теорема 8.2 беше преоткрита в [9].

От Теорема 8.2 и [40] получаваме

Теорема 8.3. *(Касабов [28]) Нека M е $2n$-мерно приблизително Келерово многообразие, $n > 2$, с нулев тензор на Бохнер и постоянна скаларна кривина.Тогава M е локално изометрично на едно от следните многообразия:*

а) комплексното Евклидово пространство $\mathbb{CE}^n$;

б) комплексното хиперболично пространство $\mathbb{CD}^n$;

в) комплексното проективно пространство $\mathbb{CP}^n$;

г) шестмерната сфера $\mathbb{S}^6$;

д) произведение $\mathbb{CD}^1(-\mu) \times \mathbb{S}^6(\mu)$;

е) произведение $\mathbb{CD}^{n_1}(-\mu) \times \mathbb{CP}^{n_2}(\mu)$, $n_1 + n_2 = n$.

Да отбележим, че предположението за постоянна скаларна кривина в Келеровия случай е съществено (докато съгласно Теорема 8.2 за не-Келерово приблизително Келерово многообразие с нулев тензор на Бохнер скаларната кривина е необходимо константа). Наистина, ако например

$$\phi = \arcsin t \qquad \text{или} \qquad \phi = \operatorname{arsh} t\,, \qquad t = \sum_1^n z_\alpha \bar{z}_\alpha\,,$$

то Келеровата метрика

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}$$

е с нулев тензор на Бохнер, но нейната скаларна кривина не е константа [49].

Тъй като съгласно Следствие 6.6 всяко почти Ермитово многообразие с постоянна антихоломорфна секционна кривина е с нулев тензор на Бохнер, получаваме още

Следствие 8.4. *(Ганчев-Касабов, [16]) Нека M е $2n$-мерно приблизително Келерово многообразие, $n > 2$. Ако M е с постоянна антихоломорфна секционна кривина μ, то е локално изометрично на едно от следните многообразия:*

а) комплексното Евклидово пространство $\mathbb{CE}^n$;

б) комплесното хиперболично пространство $\mathbb{CD}^n(4\mu)$;

в) комплексното проективно пространство $\mathbb{CP}^n(4\mu)$*;*

г) шестмерната сфера $\mathbb{S}^6$*.*

9 Почти Келерови многообразия с нулев тензор на Бохнер

В тази секция ще изследваме задача, подобна на тази от секция 8, но за друг основен клас - този на почти Келеровите многообразия. Припомняме, че едно почти Ермитово многообразие е почти Келерово, когато Келеровата форма е затворена или еквивалентно - когато почти коплексната структура изпълнява условието

$$g((\nabla_x J)y, z) + g((\nabla_y J)z, x) + g((\nabla_z J)x, y) = 0 \ . \tag{9.1}$$

Както казахме в секция 2, всяко почти Келерво многообразие принадлежи и на широкия клас на полу-Келеровите многообразия, т.е. изпълнява

$$\sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{e_i} J)e_i = 0 \ , \tag{9.2}$$

където $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ е произволна ортонормиран базис на допирателно пространство. За последния клас многообразия ще докажем една обща теорема, която ще използваме за почти Келерови многообразия:

Теорема 9.1. *(Касабов [34]) Нека* M *е* $2n$*-мерно полу-Келерово многообразие,* $n > 2$*, такова че тензорът на кривина има вида*

$$R = \varphi(P) + f\pi_1 + h\pi_2 \ , \tag{9.3}$$

където f *и* h *са функции, а* P *е симетрично тензорно поле от тип (0,2). Тогава* h *е константа. Ако* $h = 0$*, то* M *е конформно плоско. Ако* $h \neq 0$*, то* M *е Келерово многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина.*

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че от (9.3) с контракция следва, че тензорното поле P е симетрично.

За произволна точка $p \in M$, нека x, y, z са единични вектори в T_pM, така че x, y, z, Jx, Jy, Jz са взаимно ортогонални.

От второто тъждество на Бианки

$$(\nabla_{Jx}R)(y, Jy, Jz, z) + (\nabla_y R)(Jy, Jx, Jz, z) + (\nabla_{Jy}R)(Jx, y, Jz, z) = 0$$

следва

$$2Jx(h) - 2h\Big(g((\nabla_y J)y, x) + g((\nabla_{Jy}J)Jy, x)\Big) = 0 \ . \tag{9.4}$$

Нека $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ е ортонормирана база на T_pM, така че $e_1 = x, e_2 = Jx$. В (9.4) полагаме $y = e_i$ и сумираме по $i = 3, ..., 2n$, като използваме (9.2). Получаваме $Jx(h) = 0$, т.е. h е константа.

а) Нека $h = 0$. От (9.3) с две контракции намираме

$$S = 2(n-1)P + trP + (2n-1)f \ ,$$

$$\tau(R) = 2(2n-1)trP + 2n(2n-1)f \ ,$$

откъдето

$$R = \frac{1}{n-2}\varphi(S) - \frac{\tau(R)}{2(n-1)(2n-2)}\pi_1 \ .$$

Следователно M е с нулев тензор на Вайл и значи е конформно плоско.

б) Нека $h \neq 0$. Тогава (9.4) приема вида

$$g((\nabla_y J)y, x) + g((\nabla_{Jy}J)Jy, x) = 0 \ . \tag{9.5}$$

Сега от

$$(\nabla_{Jx}R)(y, z, Jz, Jy) + (\nabla_y R)(z, Jx, Jz, Jy) + (\nabla_z R)(Jx, y, Jz, Jy) = 0$$

и $h = const. \neq 0$ получаваме

$$g((\nabla_y J)y, x) + g((\nabla_z J)z, x) = 0 \ . \tag{9.6}$$

От (9.5) и (9.6) следва

$$g((\nabla_y J)y, x) = g((\nabla_{Jy}J)Jy, x) \ ,$$

а оттук, като използваме отново (9.6), получаваме $(\nabla_y J)y = 0$, т.е. M е приблизително Келерово. Сега от

$$(\nabla_x R)(y, Jz, Jz, z) + (\nabla_y R)(Jz, x, Jz, z) + (\nabla_{Jz} R)(x, y, Jz, z) = 0$$

след опростявания намираме

$$\begin{aligned}&(\nabla_x P)(y, z) - (\nabla_y P)(x, z)\\ +h&\Big(3g((\nabla_x J)y, Jz) + 3g((\nabla_y J)Jz, x) + 2g((\nabla_{Jz} J)x, y)\Big) = 0\ .\end{aligned}$$

В последното равенство правим два пъти циклична сума по x, y, z и след събиране на резултатите, получаваме

$$\begin{aligned}&3g((\nabla_x J)y, Jz) + 3g((\nabla_y J)z, Jx) + 3g((\nabla_z J)x, Jy)\\ +&g((\nabla_{Jx} J)y, z) + g((\nabla_{Jy} J)z, x) + g((\nabla_{Jz} J)x, y) = 0\ .\end{aligned}$$

Тъй като многообразието е приблизително Келерово, това влече

$$g((\nabla_x J)y, Jz) + g((\nabla_y J)z, Jx) + g((\nabla_z J)x, Jy) = 0\,.$$

Тук заменяме z с Jz и като използваме $(\nabla_x J)y + (\nabla_y J)x = 0$, намираме

$$g((\nabla_x J)y, z) + g((\nabla_y J)z, x) + g((\nabla_z J)x, y) = 0$$

за всички вектори x, y, z в T_pM, за които x, y, z, Jx, Jy, Jz са взаимно ортогонални. Да забележим обаче, че последното равенство е в сила и когато $z = y$ или $z = Jy$. Оттук лесно доказваме, че това равенство е в сила за произволни вектори x, y, z в T_pM. Следователно M е почти Келерово. Но ако едно многообразие е почти Келерово и приблизително Келерово, то е Келерово, с което твърдението е доказано. $\square$

Забележка. Римановите многообразия с постоянна секционна кривина често се наричат още *реални пространствени форми*. Аналогично Келеровите многообразия с постоянна холоморфна секционна кривина се наричат *комплексни пространствени форми*. Във връзка с това е въведен терминът *обобщени пространствени форми* - това са почти Ермитови многообразия с тензор на кривината от вида

$$R = f\pi_1 + h\pi_2\ ,$$

където f и h са функции. Дефиницията се базира на по-общия вид на такъв тензор на кривина. Такива многообразия бяха отделен предмет на изучаване, но по-късно в [50] беше доказано, че при $n > 2$ такова многообразие е реална или комплексна пространствена форма, т.е. всъщност няма други обобщени пространствени форми. Доказаната по-горе Теорема 9.1 очевидно има за полу-Келерови многообразия по-общ характер от цитирания резултат от [50].

Следващите разглеждания ще са за AK_2-многообразия. Преди всичко да припомним, че тези многообразия са и квази-Келерови, т.е.

$$(\nabla_x J)y + (\nabla_{Jx} J)Jy = 0 \qquad \text{или} \qquad (\nabla_{Jx} J)y = (\nabla_x J)Jy \ . \tag{9.7}$$

Освен това за AK_2-многообразия са в сила [4], [24]

$$2(\nabla_x (S - S^*))(y, z) = (S - S^*)((\nabla_x J)y, Jz) + (S - S^*)(Jy, (\nabla_x J)z) \ , \tag{9.8}$$

$$R(x, y, z, u) - R(x, y, Jz, Ju) = \frac{1}{2} g(K(x, y), K(z, u)) \ , \tag{9.9}$$

където $K(x, y) = (\nabla_x J)y - (\nabla_y J)x$.

Нататък за удобство ще използваме тензора $Q = \dfrac{1}{2(n-2)}(S - S^*)$. Ясно е, че той също изпълнява (9.8). Да забележим, че от (9.7) и (9.8) следват

$$(\nabla_x Q)(y, z) + (\nabla_x Q)(Jy, Jz) = 0 \ , \tag{9.10}$$

$$(\nabla_x Q)(y, Jz) = (\nabla_x Q)(Jy, z) = (\nabla_{Jx} Q)(y, z) \ . \tag{9.11}$$

В доказателството на следващата теорема, освен второто тъждество на Бианки

$$(\nabla_x R)(y, z, u, v) + (\nabla_y R)(z, x, u, v) + (\nabla_z R)(x, y, u, v) = 0 \tag{9.12}$$

ще използваме и тъждествата на Ричи за почти комплексната структура J и за произволен тензор P от тип (0,2):

$$(\nabla_x(\nabla_y J))(z) - (\nabla_y(\nabla_x J))(z) = R(x, y)Jz - JR(x, y)z \ ,$$

$$(\nabla_x(\nabla_y P))(z, u) - (\nabla_y(\nabla_x P))(z, u) = -P(R(x, y)z, u) - P(z, R(x, y)u) \ .$$

Да въведем още тензора

$$T = \frac{1}{8(n+2)}(S+3S^*) - \frac{1}{8(n-2)}(S-S^*) \ ,$$

както и функциите

$$\mu = \frac{\tau+3\tau^*}{16(n+1)(n+2)} - \frac{\tau-\tau^*}{16(n-1)(n-2)} \ , \qquad\qquad \nu = \frac{\tau-\tau^*}{4(n-1)(n-2)} \ .$$

Да обърнем внимание, че за AH_3-многообразие тензорите T и Q са симетрични и хибридни, защото такива са S и S^*.

С въведените означения тензора на Бохнер за AH_3-многообразие записваме накратко във вида

$$B(R) = R - (\varphi+\psi)(T) - \varphi(Q) + \mu(\pi_1+\pi_2) + \nu\pi_1 \ .$$

В следващите леми предполагаме, че M е AK_2-многообразие с нулев тензор на Бохнер $B(R)$ и постоянна скаларна кривина. Преди всичко да отбележим, че от (9.10) лесно се получава

$$x(\tau(R) - \tau^*(R)) = 0 \ .$$

Оттук поради $\tau(R) = const.$ следва, че и $\tau^*(R)$ е константа, а значи μ и ν също са константи.

Както отбелязахме, тензорът Q има свойството (9.8). Сега ще видим, че при направените предположения то се изпълнява и от T:

Лема 9.2. *Тензорът T удовлетворява тъждеството*

$$2(\nabla_x T)(y,z) = T((\nabla_x J)y, Jz) + T(Jy, (\nabla_x J)z) \tag{9.13}$$

за произволни $x, y, z \in T_pM$, $p \in M$.

Доказателство. Нека x, y са произволни единични вектори в T_pM, такива че $x \perp y, Jy$. Във второто тъждество на Бианки (9.12) полагаме $z = u = Jy$, $v = y$ и като използваме (9.10), намираме

$$(\nabla_x T)(y,y) + (\nabla_x T)(Jy,Jy) = (\nabla_y T)(x,y) + (\nabla_{Jy} T)(x,Jy) \ . \tag{9.14}$$

Аналогично, от (9.12) при $z = Jy$, $u = Jx$, $v = x$, следва

$$\begin{aligned}(\nabla_x T)(x,x) + (\nabla_x T)(Jx,Jx) + (\nabla_x T)(y,y) + (\nabla_x T)(Jy,Jy)\\ = 4(\nabla_y T)(x,y) + 4(\nabla_{Jy} T)(x,Jy)\ .\end{aligned}$$

Поради последните две равенства

$$(\nabla_x T)(x,x) + (\nabla_x T)(Jx,Jx) = 3(\nabla_x T)(y,y) + 3(\nabla_x T)(Jy,Jy)\ . \tag{9.15}$$

Нека $\{e_i, Je_i,\ i = 1,...n\}$ е адаптиран базис на T_pM, за който $x = e_1$. В (9.15) полагаме $y = e_i$ и събираме за $i = 2,...n$. Като използваме, че $\tau(R)$ и $\tau^*(R)$ са константи, получаваме

$$(\nabla_x T)(x,x) + (\nabla_x T)(Jx,Jx) = 0\ . \tag{9.16}$$

Сега (9.15) приема вида

$$(\nabla_x T)(y,y) + (\nabla_x T)(Jy,Jy) = 0 \tag{9.17}$$

за $x \perp y, Jy$. От (9.16) и (9.17) ще изведем, че (9.17) е в сила за произволни вектори в T_pM. Наистина, нека $y, z \in T_pM$ са произволни. Тогава z се представя във вида

$$z = ax + by + cJy\ ,$$

където a, b, c са реални числа, а x е вектор в T_pM, такъв че $x \perp y, Jy$. Оттук с използване на тензорния характер на ∇T и равенствата (9.16) и (9.17), получаваме

$$(\nabla_z T)(y,y) + (\nabla_z T)(Jy,Jy) = 0\ .$$

Тъй като T е симетричен тензор, това влече

$$(\nabla_x T)(y,z) + (\nabla_x T)(Jy,Jz) = 0$$

за произволни $x, y, z \in T_pM$. Оттук, използвайки

$$(\nabla_x T)(Jy,Jz) = (\nabla_x T)(y,z) - T((\nabla_x J)y, Jz) - T(Jy, (\nabla_x J)z\,,$$

получаваме заключението на лемата. □

Забележка. От доказаното следва, че тензорът T удовлетворява и аналозите на (9.10) и (9.11).

Лема 9.3. *Тензорът T има свойството*

$$T(R(x,y)z,u)+T(z,R(x,y)u)+T(R(x,y)Jz,Ju)+T(Jz,R(x,y)Ju)$$
$$=\frac{1}{2}\Big(T((\nabla_x J)(\nabla_y J)z,u)+T(z,(\nabla_x J)(\nabla_y J)u)$$
$$-T((\nabla_y J)(\nabla_x J)z,u)-T(z,(\nabla_y J)(\nabla_x J)u)\Big)\ .$$

Доказателство. С използване на Лема 9.2 пресмятаме

$$(\nabla_x(\nabla_y T))(z,u)=\frac{1}{2}\Big(T((\nabla_x(\nabla_y J))z,Ju)+T(Jz,(\nabla_x(\nabla_y J))u)\Big)$$
$$+\frac{1}{4}\Big(T((\nabla_x J)u,(\nabla_y J)z)+T((\nabla_x J)z,(\nabla_y J)u)$$
$$-T((\nabla_x J)(\nabla_y J)z,u)-T(z,(\nabla_x J)(\nabla_y J)u)\Big)\ .$$

Оттук намираме

$$(\nabla_x(\nabla_y T))(z,u)-(\nabla_y(\nabla_x T))(z,u)$$
$$=\frac{1}{2}\Big(T((\nabla_x(\nabla_y J))z,Ju)+T(Jz,(\nabla_x(\nabla_y J))u)$$
$$-T((\nabla_y(\nabla_x J))z,Ju)-T(Jz,(\nabla_y(\nabla_x J))u)\Big)$$
$$+\frac{1}{4}\Big(T((\nabla_y J)(\nabla_x J)z,u)+T(z,(\nabla_y J)(\nabla_x J)u)$$
$$-T((\nabla_x J)(\nabla_y J)z,u)-T(z,(\nabla_x J)(\nabla_y J)u)\Big)\ .$$

Като приложим тъждеството на Ричи за тензорите T и J в горното равенство, завършваме доказателството на лемата. □

До края на тази секция x,y,z ще бъдат взаимно ортогонални собствени вектори на симетричния и хибриден тензор T, които са базис на 3-мерно антихоломорфно подпространство на T_pM (ясно е, че тук с T означаваме както тензора от тип (0,2), така и съответния му тензор от тип (1,1) спрямо метричния тензор g). За всеки собствен вектор x на T означаваме с λ_x съответната собствена стойност. Тогава

$$T(x)=\lambda_x x\ ,\qquad T(Jx)=\lambda_x Jx\ .$$

Лема 9.4. *Ако за някоя тройка вектори $\{x,y,z\}$ от избрания базис е в сила*

$$g((\nabla_x J)y,z)\neq 0\ ,$$

то тензорът T е пропорционален на метричния тензор (в p).

Доказателство. Като заместим (u,v) с (z,Jz) в (9.12) и използваме (9.1) и Лема 9.2, намираме

$$\begin{aligned}(9.18)\qquad &\big(\nabla_x(T+Q)\big)(y,Jz)-\big(\nabla_y(T+Q)\big)(x,Jz)\\&+\big(\lambda_x-\frac{1}{2}\lambda_y-\frac{5}{2}\lambda_z+\mu\big)g((\nabla_xJ)y,z)\\&+\big(\frac{1}{2}\lambda_x-\lambda_y+\frac{5}{2}\lambda_z-\mu\big)g((\nabla_yJ)x,z) \;=\; 0\ .\end{aligned}$$

Аналогично, от

$$(\nabla_{Jx}R)(y,x,x,z)+(\nabla_yR)(x,Jx,x,z)+(\nabla_xR)(Jx,y,x,z)=0$$

следва

$$\begin{aligned}(9.19)\qquad &\big(\nabla_{Jx}(T+Q)\big)(y,z)-\big(\nabla_y(T+Q)\big)(Jx,z)\\&+\big(\lambda_x+\frac{1}{2}\lambda_y+\frac{1}{2}\lambda_z-\mu\big)g((\nabla_xJ)y,z)\\&+\big(-\frac{9}{2}\lambda_x-\frac{3}{2}\lambda_z+3\mu\big)g((\nabla_yJ)x,z) \;=\; 0\ .\end{aligned}$$

От (9.18) и (9.19), като използваме (9.11) и неговия аналог за тензора T, получаваме

$$(9.20)\qquad (\lambda_y+3\lambda_z-2\mu)g((\nabla_xJ)y,z)+(-5\lambda_x+\lambda_y-4\lambda_z+4\mu)g((\nabla_yJ)x,z)=0\ .$$

Като сменим местата на x и y, имаме още

$$(\lambda_x-5\lambda_y-4\lambda_z+4\mu)g((\nabla_xJ)y,z)+(\lambda_x+3\lambda_z-2\mu)g((\nabla_yJ)x,z)=0\ .$$

Тъй като $g((\nabla_xJ)y,z)\neq 0$, детерминантата на системата от последните две уравнения за $g((\nabla_xJ)y,z)$, $g((\nabla_yJ)x,z)$ е нула, т.е.

$$\begin{aligned}D(x,y,z) &= 5\lambda_x^2+5\lambda_y^2-7\lambda_z^2-25\lambda_x\lambda_y-13\lambda_x\lambda_z\\&- 13\lambda_y\lambda_z+(14\lambda_x+14\lambda_y+20\lambda_z)\mu-12\mu^2=0\ .\end{aligned}$$

От условието на лемата и (9.1) следва, че поне едно от $g((\nabla_yJ)z,x)$ и $g((\nabla_zJ)x,y)$ също трябва да е различно от нула. Нека например $g((\nabla_yJ)z,x)\neq 0$. Тогава аналогично на горното имаме $D(y,z,x)=0$. Възможни са следните два случая:

Случай 1: $g((\nabla_zJ)x,y)$ също не е нула. Тогава $D(z,x,y)=0$. Директно се установява, че системата

$$D(x,y,z)=D(y,z,x)=D(z,x,y)=0$$

има решение $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \mu/2$.

Случай 2: $g((\nabla_z J)x, y) = 0$. Тогава (9.20) и $M \in AK$ влекат

$$5\lambda_x - 2\lambda_y + \lambda_z - 2\mu = 0\ .$$

Сега се проверява, че системата

$$D(x,y,z) = D(y,z,x) = 5\lambda_x - 2\lambda_y + \lambda_z - 2\mu = 0$$

също има решение $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \mu/2$.

С това се убедихме, че ако $n = 3$, то $T = \mu/2\, g$, с което в този случай лемата е доказана.

Нека $n \geq 4$, а u е собствен вектор на T, ортогонален на $span\{x, y, z, Jx, Jy, Jz\}$. Като заместим в (9.12) (x, y, z, u, v) с (y, z, u, Ju, x), намираме

$$(\lambda_x + \lambda_z + 2\lambda_u - 2\mu)g((\nabla_y J)z, x) - (\lambda_x + \lambda_y + 2\lambda_u - 2\mu)g((\nabla_z J)y, x) = 0\ .$$

С използване на $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \mu/2$, последното приема вида

$$(2\lambda_u - \mu)g((\nabla_y J)z, x) - (2\lambda_u - \mu)g((\nabla_z J)y, x) = 0$$

Оттук поради (9.1) получаваме

$$(2\lambda_u - \mu)g((\nabla_x J)y, z) = 0$$

и следователно $\lambda_u = \mu/2$, което доказва твърдението. □

Лема 9.5. *Ако*

$$g((\nabla_y J)y, x) \neq 0\ ,$$

то $\lambda_x = \lambda_z$.

Доказателство. В (9.12) полагаме $u = z$, $v = y$. Резултатът е

$$(\nabla_x(T+Q))(y,y) + (\nabla_x(T+Q))(z,z) = (\nabla_y(T+Q))(x,y) + (\nabla_z(T+Q))(x,z)\ .$$

Тук сменяме z със Jz и комбинираме резултата с горното, като използваме (9.10) и неговия аналог за тензора T. Получаваме

$$(\nabla_x(T+Q))(y,y) = (\nabla_y(T+Q))(x,y)\ . \tag{9.21}$$

Сега от второто тъждество на Бианки във вида

$$(\nabla_{Jx}R)(x,y,y,x)+(\nabla_x R)(y,Jx,y,x)+(\nabla_y R)(Jx,x,y,x)=0 \ ,$$

с използване на (9.21), (9.11) и Лема 9.2 намираме

$$3\lambda_x+\lambda_y-2\mu=0 \ .$$

Аналогично, от (9.12) с $u=Jz$, $v=y$ следва

$$\lambda_x+\lambda_y+2\lambda_z-2\mu=0 \ .$$

Сега получаваме твърдението от последните две равенства и условието на лемата. □

Лема 9.6. *Нека M не е Келерово в точка p, т.е. $(\nabla J)_p \neq o$. Тогава съществува число λ, така че $T=\lambda\, g$ в p.*

Доказателство. Нека $\{e_i, Je_i;\ i=1,...,n\}$ е адаптиран базис на T_pM от собствени вектори на T. Съгласно Леми 9.4 и 9.5 е достатъчно да разгледаме случая

$$(\nabla_{e_1}J)e_1\neq 0\,, \qquad\qquad (\nabla_{e_i}J)e_j=0$$

за произволни $i=2,...,n$, $j=1,...,n$. Освен това, поради Лема 9.5 е в сила $\lambda_2=\lambda_3=...=\lambda_n$. Да означим това число с λ и да допуснем, че $\lambda\neq\lambda_1$. Да забележим, че поради

$$g(e_1,(\nabla_{e_1}J)e_1)=g(Je_1,(\nabla_{e_1}J)e_1)=0$$

можем да считаме, че $e_2 \parallel (\nabla_{e_1}J)e_1$. Тогава имаме още

$$g((\nabla_{e_1}J)e_1,e_i)=g((\nabla_{e_1}J)e_1,Je_i)=0 \quad \text{за } i=3,...,n \ ,$$

а оттук, като използваме отново Лема 9.4, следва

$$(\nabla_{e_1}J)e_i=0 \quad \text{за } i=3,...,n \ . \tag{9.22}$$

Сега да се обърнем към равенството в Лема 9.3. Полагаме в него $x=u=e_1$, $y=z=e_i$ $(i>1)$ и намираме

$$2\lambda_1+2\lambda+Q(e_1,e_1)+Q(e_i,e_i)-2\mu-\nu=0 \ .$$

Оттук $Q(e_i, e_i) = Q(e_j, e_j)$ за произволни $i, j = 2, ..., n$. Правим същата субституция в (9.9) и получаваме

$$Q(e_1, e_1) + Q(e_i, e_i) - \nu = -\frac{1}{2}\, g((\nabla_{e_1} J)e_i, (\nabla_{e_1} J)e_i)$$

за всяко $i = 2, ..., n$. Сега $Q(e_2, e_2) = Q(e_3, e_3)$ и (9.11) влекат

$$g((\nabla_{e_1} J)e_2, (\nabla_{e_1} J)e_2) = 0$$

и оттук

$$(\nabla_{e_1} J)e_1 = 0 \ ,$$

което е противоречие. Това доказва твърдението. □

Следващата теорема е уточнение на нашите резултати от [29] и [30] за конформно плоски AK_3-многообразия.

Теорема 9.7. *(Касабов [34]) Нека M е $2n$-мерно конформно плоско AK_3-многообразие, $n \geq 2$. Тогава M е плоско Келерово многообразие или $n = 2$ и M локално е произведение на две 2-мерни Келерови многообразия M_1 и M_2 с постоянна секционна кривина c и $-c$ ($c \neq 0$), съответно.*

Доказателство. Съгласно [29] и [30] едно конформно плоско AK_3-многообразие с размерност ≥ 4 трябва да е 4- или 6-мерно многообразие с постоянна секционна кривина или плоско Келерово многообразие, или произведение на две почти Келерови многообразия M_1 и M_2 с постоянни секционни кривини c и $-c$, $c > 0$, съответно. От друга страна по-късно беше доказано в [42], че всяко почти Келерово многообразие с постоянна секционна кривина и размерност ≥ 4 е плоско Келерово многообразие. Оттук теоремата следва непосредствено. □

Забележка. Както е показано в [6], съществуват примери на почти Келерови конформно плоски многообразия, които не са Келерови. Следователно AH_3-изискването в Теорема 9.7 не може да се изпусне.

Сега ще докажем основния резултат в тази секция.

Теорема 9.8. *(Касабов [34]) Нека M е $2n$-мерно AK_3-многообразие, $n > 2$, с нулев тензор на Бохнер $B(R)$ и постоянна скаларна кривина. Тогава M е Келерово многообразие.*

Доказателство. Преди всичко да забележим, че от $M \in AK_3$ и $B(R) = 0$ следва, че M е AK_2-многообразие. Да допуснем, че M не е Келерово в някоя точка q, т.е. $(\nabla J)_q \neq 0$. Тогава M не е Келерово в околност U на q. Съгласно Лема 9.6 в U е в сила $T = \lambda\, g$, където λ е функция. Сега от $B(R) = 0$ следва, че в U тензорът на кривина на M има вида

$$R = \varphi(Q) + \theta(\pi_1 + \pi_2) - \nu\pi_1$$

за някаква функция θ. Съгласно Теорема 9.1 областта U е конформно плоска. Сега от Теорема 9.7 следва, че U е плоско Келерово многообразие, което е противоречие. $\square$

ТРЕТА ГЛАВА

ПОЧТИ ЕРМИТОВИ МНОГООБРАЗИЯ С ПОСТОЯННА АНТИХОЛОМОРФНА СЕКЦИОННА КРИВИНА

10 Теорема на Шур за почти Ермитови многообразия

Доколкото в тази глава ще се занимаваме с почти Ермитовите многообразия с постоянна антихоломорфна секционна кривина, естествено е да започнем с въпроса за съответен аналог на теоремата на Шур. Теоремата, която ще докажем в настоящата секция е особено важна - първо защото валидността на теорема от тип „теореми на Шур“ по начало е основен проблем и второ, защото тя отваря път за разглежданията в следващите три секции.

Да припомним, че съгласно Следствие 6.7 тензорът на кривина на почти Ермитово многообразие с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина има вида

$$R = \frac{1}{2(n+1)}\psi(S^*) + \nu\pi_1 - \frac{\tau^* + 2(n+1)\nu}{2(n+1)(2n+1)}\pi_2 \ . \tag{10.1}$$

При това в общия случай тензорът S^* не е нито симетричен, нито хибриден, но има свойството

$$S^*(Jx, Jy) = S^*(y, x) \ .$$

С цел съкращаване на записите, означаваме

$$Q = \frac{1}{2(n+1)}S^* - \frac{\tau^* + 2(n+1)\nu}{4(n+1)(2n+1)}g \ .$$

Ясно е, че тензорът Q също не е симетричен или хибриден, но има свойството

$$Q(Jx, Jy) = Q(y, x) \ . \tag{10.2}$$

С него (10.1) се записва във вида

$$R = \psi(Q) + \nu\pi_1 \ . \tag{10.3}$$

В някои разглеждания дотук беше удобно използването на адаптиран базис на допирателно пространство, който да диагонализира някой тензор, например тензора на Ричи. За целта въпросният тензор трябва да е симетричен и хибриден (както вече сме правили, и тук ще означаваме по един и същ начин тензор от тип (0,2) и съответния му тензор от тип(1,1) спрямо метричния тензор). Сега обаче ще работим с тензора Q, който, както вече казахме, няма тези свойства. Затова ще подготвим две помощни твърдения, които ще ни позволят да използваме подход, подобен на използвания досега.

Преди всичко да означим със $s(Q)$ симетричната част на тензора Q:

$$s(Q)(x,y) = \frac{1}{2}\big(Q(x,y) + Q(y,x)\big) \ .$$

В произволна точка $p \in M$ избираме адаптиран базис $\{e_1, Je_1, ..., e_n, Je_n\}$ на T_pM, който диагонализира $s(Q)$, т.е.

$$s(Q)(e_i, e_j) = s(Q)(e_i, Je_j) = 0 \tag{10.4}$$

за произволни $i \neq j$. Да забележим, че поради (10.2) е в сила

$$Q(e_i, Je_j) = -Q(e_j, Je_i) \ .$$

Лема 10.1. *Нека x, y са вектори от избрания ортонормиран базис, такива че $g(x,y) = g(x, Jy) = 0$. Съществува ненулев вектор $\tilde{y} \in span\{y, Jy\}$, такъв че $Q(x, J\tilde{y}) = 0$.*

Доказателство. Ако $Q(x, Jy) = 0$, няма какво да доказваме. Затова нека $Q(x, Jy) \neq 0$. Тогава директво се проверява, че ненулевият вектор

$$\tilde{y} = \frac{Q(x,y)}{Q(x,Jy)} y + Jy$$

изпълнява желаното изискване. □

Лема 10.2. *Нека x, y, z са вектори от избрания адаптиран базис, такива че $span\{x, y, z\}$ е 3-мерно антихоломорфно подпространство на T_pM. Съществуват ненулеви вектори*

$$\tilde{x} \in span\{x, Jx\} \ , \qquad \tilde{y} \in span\{y, Jy\} \ , \qquad \tilde{z} \in span\{z, Jz\} \ ,$$

такива че

$$Q(\tilde{x}, J\tilde{y}) = 0 \ , \qquad Q(\tilde{x}, J\tilde{z}) = 0 \ , \qquad Q(\tilde{y}, J\tilde{z}) = 0 \ . \tag{10.5}$$

Доказателство. Съгласно Лема 10.1 можем да считаме, че

$$Q(x, Jy) = Q(x, Jz) = 0 \ .$$

Ако и $Q(y, Jz) = 0$ няма какво да доказваме. Нека $Q(y, Jz) \neq 0$. Полагаме

$$\tilde{x} = ax + Jx \ , \qquad \tilde{y} = by + Jy \ , \qquad \tilde{z} = cz + Jz \ ,$$

където a, b, c са реални числа. Да обърнем внимание, че поради (10.4)

$$Q(x, y) = -Q(y, x) \ , \qquad Q(y, z) = -Q(z, y) \ , \qquad Q(z, x) = -Q(x, z) \ .$$

Сега лесно се проверява, че едно достатъчно условие за да е изпълнено изискването (10.5), е

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ (b + c)Q(y, z) + (1 - bc)Q(y, Jz) = 0 \ . \end{cases}$$

Както лесно се съобразява, последната система за числата a, b, c винаги има решение. При това например векторът $\tilde{x}$ не е нулевият вектор, тъй като x и Jx са линейно независими. □

Да обърнем внимание, че векторите $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ от Лема 10.1 също са собствени на $s(Q)$, при това отговарят на същите собствени стойности, както x, y, z, съответно.

Сега можем да докажем и теоремата на Шур:

Теорема 10.3. *(Касабов [32]) Нека M е свързано $2n$-мерно почти Ермитово многообразие, $n > 2$. Ако за всяка точка $p \in M$ кривината на произволна антихоломорфна площадка α в T_pM не зависи от α: $K(\alpha, p) = \nu(p)$, то ν е глобална константа, т.е. M е с постоянна антихоломорфна секционна кривина.*

Доказателство. Нека векторите x, y, z са базис на 3-мерно антихоломорфно подпространство на T_pM. От второто тъждество на Бианки

$$(\nabla_x R)(y, z, z, y) + (\nabla_y R)(z, x, z, y) + (\nabla_z R)(x, y, z, y) = 0 \quad ,$$

и (10.3) получаваме

$$\begin{aligned} & x(\nu) - 6g((\nabla_x J)y, z)Q(y, Jz) \\ & +3\{g((\nabla_y J)y, z)Q(x, Jz) + g((\nabla_y J)x, z)Q(y, Jz) \\ & +g((\nabla_z J)z, y)Q(x, Jy) + g((\nabla_z J)y, x)Q(y, Jz)\} \quad = 0 \ . \end{aligned} \tag{10.6}$$

Сега да си мислим, че x, y, z са от избрания адаптиран базис. При това съгласно Лема 10.2 можем да предполагаме, че $Q(x, Jy) = Q(x, Jz) = Q(y, Jz) = 0$. Тогава (10.6) влече $x(\nu) = 0$. Сега сменяме (x, y, z) в (10.6) с (Jx, Jy, Jz) и като използваме свойствата на тензора Q в избрания базис получаваме

$$\begin{aligned} Jx(\nu) - 6g((\nabla_{Jx}J)y, z)Q(y, Jz) & \\ +3\{g((\nabla_{Jy}J)y, z)Q(x, Jz) + g((\nabla_{Jy}J)x, z)Q(y, Jz) & \\ +g((\nabla_{Jz}J)z, y)Q(x, Jy) + g((\nabla_{Jz}J)y, x)Q(y, Jz)\} & = 0 \end{aligned}$$

и оттук $Jx(\nu) = 0$. Следователно ν не зависи от векторите в произволна холоморфна площадка $span\{x, Jx\}$, образувана от векторите на базиса, а оттук ν е глобална константа. □

Ограничението за размерността в горната теорема е съществено, както се вижда от следните примери:

Пример 10.1. [44] Нека $M = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ със стандартните координатна система $(x_1, x_2, x_3 = y_1, x_4 = y_2)$, Евклидова метрика g и комплексна структура J. Правим конформна смяна на метриката

$$\tilde{g} = \phi^2 g \qquad \phi = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \ .$$

Тогава $(M, \tilde{g}, J)$ е с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина

$$\tilde{\nu} = 2(1 - x_1^2 - x_2^2) \ ,$$

която не е глобална константа. □

Пример 10.2. [44] Нека $(U, (x_1, x_2, x_3 = y_1, x_4 = y_2))$ е карта за комплексното проективно пространство $(\mathbb{CP}^2(\mu), g, J)$ със стандартната метрика на Фубини-Щуди с постоянна холоморфна секционна кривина $\mu > 0$. Правим конформна смяна на метриката

$$\tilde{g} = \phi^2 g \qquad \phi = 1 + \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \ .$$

Тогава $(U, \tilde{g}, J)$ е с точково постоянна (отрицателна) антихоломорфна секционна кривина

$$\tilde{\nu} = -\frac{\mu}{4}\frac{1 + 2\phi}{\phi^2} \ ,$$

която също не е глобална константа. □

Да отбележим, че 4-мерните многообразия от горните два примера са конформно Келерови многообразия и значи са от класа W_4. Освен това повърхнината от Пример 12.1 е и конформно плоска. Следователно теоремата на Шур от антихоломорфен тип за 4-мерни многообразия не е вярна дори при допълнителното предположение многообразието да е конформно плоско. От друга страна в [43] е доказано, че теоремата на Шур от антихоломорфен тип е вярна за 4-мерни квази-Келерови многообразия.

11 AH_3-многообразия с постоянна антихоломорфна секционна кривина

Целта на тази секция е да направим класификация на AH_3-многообразията с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина. Съгласно Теорема 10.3 тази кривина е глобална константа (предполагаме разбира се, че многообразието е свързано). От друга страна поради AH_3-условието тензорът на Ричи, както и тензорът S^*, са симетрични и хибридни. Поради това връзката между тях от Следствие 6.6 приема вида

$$(n+1)S - 3S^* = \frac{1}{2n}\big\{(n+1)\tau(R) - 3\tau^*(R)\big\}\, g \ .$$

Освен това пак съгласно Следствие 6.6 между антихоломорфната кривина ν и скаларните кривини $\tau(R), \tau^*(R)$ е в сила връзката

$$\nu = \frac{(2n+1)\tau(R) - 3\tau^*(R)}{8n(n^2-1)} \ .$$

Оттук и вида на тензора на кривина за многообразие с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина

$$R = \frac{1}{2(n+1)}\psi(S^*(R)) + \nu\pi_1 - \frac{\tau^*(R) + 2(n+1)\nu}{2(n+1)(2n+1)}\pi_2$$

(Следствие 6.7), след леки преобразувания получаваме следния вид на тензора на кривина за AH_3-многообразие с постоянна антихоломорфна секционна кривина ν, който ще е по-удобен в тази секция:

$$R = \frac{1}{6}\psi(S) + \nu\pi_1 - \frac{2n-1}{3}\nu\pi_2 \ . \tag{11.1}$$

Ще докажем следната класификационна теорема:

Теорема 11.1. *(Касабов [31]) Нека M е $2n$-мерно свързано AH_3-многообразие, $n > 2$. Ако M е с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина ν, то M е с постоянна секционна кривина ν (реална пространствена форма) или Келерово многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина 4ν (комплексна пространствена форма).*

Доказателство. Нашата цел ще е да докажем, че M е Айнщайново, т.е. тензорът на Ричи е пропорционален на метричния тензор g. Както ще видим, от това твърдението на теоремата ще следва лесно.

Нека p е произволна точка на M. Тъй като тензорът на Ричи е симетричен и хибриден, съществува адаптиран базис $\{e_i,\ Je_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ на $T_p(M)$, който диагонализира S, т.е.

$$S(e_i) = \lambda_i e_i\ , \qquad S(Je_i) = \lambda_i Je_i\ , \qquad i = 1, \ldots, n\ .$$

Първо да докажем следния междинен резултат:

Лема 1. *Нека за някои различни i, j, k е в сила*

$$g((\nabla_{e_i} J)e_j, Je_k) \neq 0\ . \tag{11.2}$$

Тогава M е Айнщайново в p.

Доказателство: От второто тъждество на Бианки

$$(\nabla_x R)(Jx, y, y, Jx) + (\nabla_{Jx} R)(y, x, y, Jx) + (\nabla_y R)(x, Jx, y, Jx) = 0$$

при $x = e_k$, $y = e_i + e_j$ за $i \neq j \neq k \neq i$, с използване на (11.1) следва

$$\begin{aligned} &(\nabla_{e_i} S)(e_j, e_k) + (\nabla_{e_j} S)(e_i, e_k) \\ &+\{\lambda_i + \lambda_k - 2(2n-1)\nu\} g(Je_k, (\nabla_{e_j} J)e_i) \\ &+\{\lambda_j + \lambda_k - 2(2n-1)\nu\} g(Je_k, (\nabla_{e_i} J)e_j) \ = \ 0\,, \end{aligned} \tag{11.3}$$

Сега от

$$(\nabla_{e_i} R)(Je_j, e_j, e_j, Je_k) + (\nabla_{Je_j} R)(e_j, e_i, e_j, Je_k) + (\nabla_{e_j} R)(e_i, Je_j, e_j, Je_k) = 0$$

и (11.1) намираме

$$
\begin{aligned}
& 3(\nabla_{e_i}S)(e_j,e_k) - (\nabla_{e_j}S)(e_i,e_k) \\
(11.4) \qquad & +6\{\lambda_j - (2n-1)\nu\}g((\nabla_{e_i}J)e_j, Je_k) \\
& -\{\lambda_i + \lambda_j - 2(2n-1)\nu\}g((\nabla_{e_j}J)e_i, Je_k) \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

Тук сменяме местата на i и j:

$$
\begin{aligned}
& 3(\nabla_{e_j}S)(e_i,e_k) - (\nabla_{e_i}S)(e_j,e_k) \\
& +6\{\lambda_i - (2n-1)\nu\}g((\nabla_{e_j}J)e_i, Je_k) \qquad . \\
& -\{\lambda_i + \lambda_j - 2(2n-1)\nu\}g((\nabla_{e_i}J)e_j, Je_k) \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

От последните две равенства намираме

$$
(11.5) \qquad
\begin{gathered}
8(\nabla_{e_i}S)(e_j,e_k) + \{17\lambda_j - \lambda_i - 16(2n-1)\nu\}g((\nabla_{e_i}J)e_j, Je_k) \\
+3(\lambda_i - \lambda_j)g((\nabla_{e_j}J)e_i, Je_k) = 0\,.
\end{gathered}
$$

В (11.5) сменяме местата на j и k и събираме резултата с (11.5):

$$
(11.6) \qquad
\begin{gathered}
16(\nabla_{e_i}S)(e_j,e_k) + 17(\lambda_j - \lambda_k)g((\nabla_{e_i}J)e_j, Je_k) \\
+3(\lambda_i - \lambda_j)g((\nabla_{e_j}J)e_i, Je_k) + 3(\lambda_i - \lambda_k)g((\nabla_{e_k}J)e_i, Je_j) = 0\,.
\end{gathered}
$$

От друга страна (11.3) и (11.4) влекат

$$
(11.7) \qquad \{3\lambda_j - \lambda_i - 2\lambda_k\}g((\nabla_{e_i}J)e_j, Je_k) + \{3\lambda_i - \lambda_j - 2\lambda_k\}g((\nabla_{e_j}J)e_i, Je_k) = 0\,.
$$

Тук два пъти сменяме циклично i, j, k:

$$
(11.8) \qquad \{3\lambda_k - \lambda_j - 2\lambda_i\}g((\nabla_{e_j}J)e_k, Je_i) + \{3\lambda_j - \lambda_k - 2\lambda_i\}g((\nabla_{e_k}J)e_j, Je_i) = 0\,,
$$

$$
(11.9) \qquad \{3\lambda_i - \lambda_k - 2\lambda_j\}g((\nabla_{e_k}J)e_i, Je_j) + \{3\lambda_k - \lambda_i - 2\lambda_j\}g((\nabla_{e_i}J)e_k, Je_j) = 0\,.
$$

Сумата на последните три дава

$$
\begin{aligned}
(\lambda_j - \lambda_k)g((\nabla_{e_i}J)e_j, Je_k) + (\lambda_k - \lambda_i)g((\nabla_{e_j}J)e_k, Je_i) & \\
+(\lambda_i - \lambda_j)g((\nabla_{e_k}J)e_i, Je_j) & \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

От последното равенство и (11.8) намираме

$$
\begin{aligned}
3(\lambda_j - \lambda_k)g((\nabla_{e_i}J)e_j, Je_k) + (\lambda_i - \lambda_j)g((\nabla_{e_j}J)e_i, Je_k) & \\
+(\lambda_i - \lambda_k)g((\nabla_{e_k}J)e_i, Je_j) & \;=\; 0
\end{aligned}
$$

С използване на (11.6) от последното следва

$$2(\nabla_{e_i}S)(e_j,e_k)=(\lambda_k-\lambda_j)g((\nabla_{e_i}J)e_j,Je_k)\,. \tag{11.10}$$

Първо да се убедим, че $\lambda_i=\lambda_j=\lambda_k$ за онези i,j,k, за които е в сила (11.2).

Като използваме (11.7), (11.8), (11.9), получаваме

$$(3\lambda_i-\lambda_k-2\lambda_j)(3\lambda_j-\lambda_i-2\lambda_k)(3\lambda_k-\lambda_j-2\lambda_i)$$

$$=(3\lambda_i-\lambda_j-2\lambda_k)(3\lambda_j-\lambda_k-2\lambda_i)(3\lambda_k-\lambda_i-2\lambda_j)\ ,$$

което след опростяване може да се запише във вида

$$(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_j-\lambda_k)(\lambda_k-\lambda_i)=0\,.$$

Ще разгледаме следните две възможности:

Случай 1: $\lambda_i=\lambda_j$. Сега (11.8) и (11.9) се записват съответно във вида:

$$(\lambda_i-\lambda_k)\{3g((\nabla_{e_j}J)e_k,Je_i)+g((\nabla_{e_k}J)e_i,Je_j)\}=0\,, \tag{11.11}$$

$$(\lambda_i-\lambda_k)\{g((\nabla_{e_k}J)e_i,Je_j)+3g((\nabla_{e_i}J)e_j,Je_k)\}=0\,. \tag{11.12}$$

Случай 1.1: Нека

$$g((\nabla_{e_k}J)e_i,Je_j)=0\ .$$

Тогава (11.12) влече $\lambda_i=\lambda_k$ и оттук $\lambda_i=\lambda_j=\lambda_k$, което искахме да докажем.

Случай 1.2: Нека

$$g((\nabla_{e_k}J)e_i,Je_j)\neq 0\ .$$

В (11.5) сменяме местата на i и k и използваме $\lambda_i=\lambda_j$ и (11.10):

$$\{17\lambda_i-\lambda_k-16(2m-1)\nu\}g((\nabla_{e_k}J)e_j,Je_i)+3(\lambda_k-\lambda_i)g((\nabla_{e_j}J)e_k,Je_i)=0\,.$$

Оттук, като използваме (11.11), получаваме $\lambda_i=(2n-1)\nu$. От друга страна, (11.5) и (11.10) влекат

$$3\lambda_i+\lambda_k-4(2n-1)\nu=0$$

откъдето $\lambda_k=(2n-1)\nu$, т.е. отново имаме $\lambda_i=\lambda_j=\lambda_k$.

Случай 2: $\lambda_j = \lambda_k$. От (11.7) получаваме

$$(\lambda_i - \lambda_j)\{g((\nabla_{e_i} J)e_j, Je_k) - 3g((\nabla_{e_j} J)e_i, Je_k)\} = 0\,.$$

Ако $g((\nabla_{e_j} J)e_i, Je_k) = 0$, това влече $\lambda_i = \lambda_j$, следователно $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k$. От друга страна, ако предположим $g((\nabla_{e_j} J)e_i, Je_k) \neq 0$, от случай 1 отново получаваме $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k$.

Следователно (11.2) винаги влече $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k$. Оттук и (11.5), (11.10) намираме $\lambda_i = (2n-1)\nu$. Ако $n = 3$, многообразието M е Айнщайново в p.

Нека $n > 3$. За $s \neq i,\ j,\ k$ имаме

$$(\nabla_{e_i} R)(e_s, Je_s, e_j, Je_k) + (\nabla_{e_s} R)(Je_s, e_i, e_j, Je_k) + (\nabla_{Je_s} R)(e_i, e_s, e_j, Je_k) = 0\,,$$

откъдето с използване на (11.1) получаваме

$$(\nabla_{e_i} S)(e_j, e_k) + \{\lambda_j + \lambda_s - 2(2n-1)\nu\} g((\nabla_{e_i} J)e_j, Je_k) = 0\,.$$

Оттук, с използване на $\lambda_j = \lambda_k = (2m-1)\nu$ и (11.10), извличаме $\lambda_s = (2n-1)\nu$. Следователно M е Айнщайново в p и Лема 1 е доказана.

Поради Лема 1 интересен е случаят

$$g((\nabla_{e_i} J)e_j, e_k) = g((\nabla_{e_i} J)e_j, Je_k) = 0$$

за всички различни помежду си i, j, k и нататък ще считаме, че това е изпълнено.

Съгласно второто тъждество на Бианки

$$(\nabla_{e_i} R)(Je_i, e_j, e_j, Je_i) + (\nabla_{Je_i} R)(e_j, e_i, e_j, Je_i) + (\nabla_{e_j} R)(e_i, Je_i, e_j, Je_i) = 0$$

и като използваме (11.1), получаваме

$$(\nabla_{e_j} S)(e_i, e_j) + \{\lambda_i + \lambda_j - 2(2n-1)\nu\} g(Je_i, (\nabla_{e_j} J)e_j) = 0\,. \tag{11.13}$$

Аналогично от

$$(\nabla_{Je_i} R)(e_j, e_k, Je_k, e_j) + (\nabla_{e_j} R)(e_k, Je_i, Je_k, e_j) + (\nabla_{e_k} R)(Je_i, e_j, Je_k, e_j) = 0$$

намираме

$$(\nabla_{e_j} S)(e_i, e_j) + \{\lambda_j + \lambda_k - 2(2n-1)\nu\} g(Je_i, (\nabla_{e_j} J)e_j,) = 0\,.$$

От последното равенство и (11.13) получаваме

Лема 2. *Ако*

$$(\nabla_{e_j} J)e_j \neq 0$$

за някое j, *то* $\lambda_s = \lambda_k$ *за всички* s, $k \neq j$.

От Лема 2 следва

Лема 3. *Ако*

$$(\nabla_{e_j} J)e_j \neq 0 \ , \qquad (\nabla_{e_s} J)e_s \neq 0$$

за някои $s \neq j$, *то* M *е Айнщайново в* p.

Да допуснем, че M не е Айнщайново в p. Тогава M не е Айнщайново в околност U на p. Ще покажем, че M трябва да е AK_2-многообразие в U.

Нека $q \in U$. Разбира се, интересен е случаят, когато M не е Келерово в q. Избираме адаптиран базис $\{f_i,\, Jf_i,\, i = 1, \ldots, n\}$ на $T_q(M)$, такъв че $Sf_i = \mu_i f_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тъй като M не е Келерово и не е Айнщайново в q, съгласно Леми 2 и 3 можем да предполагаме, че $(\nabla_{f_1} J)f_1 \neq 0$, $\mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$ и

$$(\nabla_x J)y = 0 \,, \qquad g((\nabla_{f_1} J)x, y) = 0 \tag{11.14}$$

винаги когато векторите x, y са избрани мжду f_i, Jf_i за $i > 1$. Аналогично на (11.13) е в сила

$$(\nabla_{f_j} S)(f_i, f_j) + \{\mu_i + \mu_j - 2(2n-1)\nu\} g(Jf_i, (\nabla_{f_j} J)f_j) = 0 \tag{11.15}$$

а поради (11.14) това влече

$$(\nabla_{f_j} S)(f_i, f_j) = (\nabla_{Jf_j} S)(f_i, Jf_j) = 0 \,. \tag{11.16}$$

за $j > 1$, $j \neq i$. Нека $i \neq j \neq 1 \neq i$. От

$$(\nabla_{f_i} R)(f_j, f_1, Jf_1, Jf_j) + (\nabla_{f_j} R)(f_1, f_i, Jf_1, Jf_j) + (\nabla_{f_1} R)(f_i, f_j, Jf_1, Jf_j) = 0$$

с използване на (11.1), (11.14) and (11.16) получаваме

$$\begin{gathered}(\nabla_{f_i} S)(f_j, f_j) + (\nabla_{f_i} S)(f_1, f_1) - (\nabla_{f_1} S)(f_i, f_1) \\ +2\{\mu - (2n-1)\nu\} g(Jf_i, (\nabla_{f_1} J)f_1) = 0 \,.\end{gathered} \tag{11.17}$$

Нека сега $k \neq i$. От

$$(\nabla_{f_i} R)(f_k, Jf_k, Jf_k, f_k) + (\nabla_{f_k} R)(Jf_k, f_i, Jf_k, f_k) + (\nabla_{Jf_k} R)(f_i, f_k, Jf_k, f_k) = 0$$

следва

$$\begin{aligned} 2(\nabla_{f_i} S)(f_k, f_k) - (\nabla_{f_k} S)(f_i, f_k) - (\nabla_{Jf_k} S)(f_i, Jf_k) & \\ +\{\mu_i + \mu_k - 2(2n-1)\nu\} g(Jf_i, (\nabla_{f_k} J) f_k) & \\ +\{\mu_i + \mu_k - 2(2n-1)\nu\} g(Jf_i, (\nabla_{Jf_k} J) Jf_k) &= 0 \,. \end{aligned}$$

От последното и (11.15) извличаме

$$(\nabla_{f_i} S)(f_k, f_k) = (\nabla_{f_k} S)(f_i, f_k) + (\nabla_{Jf_k} S)(f_i, Jf_k) \,. \tag{11.18}$$

Сега (11.16) и (11.18) дават

$$(\nabla_{f_i} S)(f_j, f_j) = 0 \quad \text{for} \;\; i, j > 1, \; i \neq j \,.$$

Следователно (11.17) приема вида

$$(\nabla_{f_i} S)(f_1, f_1) - (\nabla_{f_1} S)(f_i, f_1) + 2\{\mu - (2n-1)\nu\} g(Jf_i, (\nabla_{f_1} J) f_1) = 0 \;,$$

а оттук с използване на (11.18), намираме

$$(\nabla_{Jf_1} S)(f_i, Jf_1) + 2\{\mu - (2n-1)\nu\} g(Jf_i, (\nabla_{f_1} J) f_1) = 0 \;,$$

откъдето

$$\begin{gathered} (\nabla_{f_1} S)(f_i, f_1) + (\nabla_{Jf_1} S)(f_i, Jf_1) \\ +2\{\mu - (2n-1)\nu\} g(Jf_i, (\nabla_{f_1} J) f_1 + (\nabla_{Jf_1} J) Jf_1) = 0 \,. \end{gathered} \tag{11.19}$$

Тъй като M не е Айнщайново в q, т.е. $\mu_1 \neq \mu$, от (11.15) и (11.19) можем да получим

$$(\nabla_{f_1} J) f_1 + (\nabla_{Jf_1} J) Jf_1 = 0 \,. \tag{11.20}$$

От (11.14) и (11.20) лесно следва, че M е почти Келерово в произволната точка q. Следователно то е почти Келерово в U, а оттук и AK_2-многообразие в U. При това ако M е Келерово в точка на U, то е с постоянна холоморфна секционна кривина в тази точка [7], а значи е и Айнщайново в тази точка, което е противоречие. Затова да предположим, че M не е Келерово в q и нека

$$(\nabla_{f_1} J) f_i = \alpha_i f_1 + \beta_i Jf_1$$

за $i > 1$. В (9.9) полагаме $x = u = f_i$, $y = z = f_1$:

$$\nu - \frac{1}{6}(\mu + \mu_1) + \frac{2n-1}{3}\nu = -\frac{1}{2}(\alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

за $i > 1$ и оттук

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 = \alpha_j^2 + \beta_j^2 \tag{11.21}$$

за $i, j > 1$. Сега да вземем в (9.9) последователно ($x = f_i$, $y = z = f_1$, $u = f_1$) и ($x = f_i$, $y = z = f_j$, $u = Jf_j$). Получаваме

$$\begin{aligned} &\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j = 0\,, \\ &\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i = 0\,, \end{aligned} \tag{11.22}$$

съответно. Но (11.21) и (11.22) влекат $\alpha_i = \beta_i = 0$ за всяко $i > 1$, т.е. M е Келерово, което е противоречие.

Следователно M е Айнщайново. Сега (11.1) приема вида

$$R = \nu\pi_1 + \lambda\pi_2$$

за някаква константа λ, т.е. M е обобщена пространствена форма. Оттук съгласно споменатия вече резултат от [50] M е реална или комплексна пространствена форма.

□

12 Почти Келерови многообразия с постоянна анти-холоморфна секционна кривина

В тази секция M ще е почти Келерово многообразие, т.е.

$$g((\nabla_X J)Y, Z) + g((\nabla_Y J)Z, X) + g((\nabla_Z J)X, Y) = 0$$

или все едно

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_Y \Phi)(Z, X) + (\nabla_Z \Phi)(X, Y) = 0\,, \tag{12.1}$$

където $\Phi(X, Y) = g(JX, Y)$ е Келеровата форма на M. Да припомним, че всяко почти Келерово многообразие е още квази-Келерово и полу-Келерово, т.е. ковариантната производна на почти комплексната структура има свойствата

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{E_i} J)E_i = 0 \tag{12.2}$$

за произволна локална ортонормирана база $\{E_1, ..., E_{2n}\}$ на $\mathfrak{X}(M)$.

Нататък ще предполагаме, че M е свързано и с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина $\nu(p)$. При това съгласно Теорема 10.3 ν е глобална константа, а както в секция 10 получаваме следното представяне за тензора на кривина:

$$R = \psi(Q) + \nu\pi_1\,, \tag{12.3}$$

където с Q сме означили тензора

$$Q = \frac{1}{2(n+1)}S^* - \frac{\tau^* + 2(n+1)\nu}{4(n+1)(2n+1)}g\ ,$$

който не е нито симетричен, нито хибриден, но има свойството

$$Q(JX, JY) = Q(Y, X)\,.$$

Оттук лесно доказваме, че тензорът Q удовлетворява равенствата

$$Q((\nabla_V J)X, JY) = Q(Y, (\nabla_V J)JX))\,, \tag{12.4}$$

$$(\nabla_V Q)(JX, JY) = (\nabla_V Q)(Y, X) - Q((\nabla_V J)X, JY) - Q(JX, (\nabla_V J)Y)\,, \tag{12.5}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} Q((\nabla_V J)E_i, JE_i) = -\sum_{i=1}^{2n} Q(JE_i, (\nabla_V J)E_i,)\,, \tag{12.6}$$

за произволна локална ортонормирана база $\{E_1, ..., E_{2n}\}$ на $\mathfrak{X}(M)$. При това от (12.1) и (12.2) получаваме още

$$\sum_{i=1}^{2n} Q(V, E_i)(\nabla_{E_i}\Phi)(Y, X) = Q(V, (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X)\,; \tag{12.7}$$

$$2\sum_{i=1}^{2n} Q(JE_i, (\nabla_{E_i} J)V) = \sum_{i=1}^{2n} Q(JE_i, (\nabla_V J)E_i)\,. \tag{12.8}$$

Да забележим, че с прилагане на формулите от Следствие 6.6 можем да запишем тензора Q във вида

$$Q = \frac{1}{6}S(R) + \frac{1}{4(n+1)}S^*(R-\overline{R}) - \frac{2n-1}{6}\,\nu g\ . \tag{12.9}$$

Като използваме (12.3) и второто тъждество на Бианки, ще установим още някои свойства на Q и ∇Q, които ще ни бъдат полезни за доказването на основния резултат в тази секция.

Преди всичко да отбележим, че от (12.3) получаваме следния израз за ковариантната производна на тензора на кривина:

$$\begin{aligned}(\nabla_V R)(X,Y,Z,W) = {} & 2g(X,JY)\{(\nabla_V Q)(Z,JW) + Q(Z,(\nabla_V J)W)\}\\ & +2g(Z,JW)\{(\nabla_V Q)(X,JY) + Q(X,(\nabla_V J)Y)\}\\ & +g(X,JZ)\{(\nabla_V Q)(Y,JW) + Q(Y,(\nabla_V J)W)\}\\ & +g(Y,JW)\{(\nabla_V Q)(X,JZ) + Q(X,(\nabla_V J)Z)\}\\ & -g(Y,JZ)\{(\nabla_V Q)(X,JW) + Q(X,(\nabla_V J)W)\}\\ & -g(X,JW)\{(\nabla_V Q)(Y,JZ) + Q(Y,(\nabla_V J)Z)\}\\ & +2(\nabla_V\Phi)(Y,X)Q(Z,JW) + 2(\nabla_V\Phi)(W,Z)Q(X,JY)\\ & +(\nabla_V\Phi)(Z,X)Q(Y,JW) + (\nabla_V\Phi)(W,Y)Q(X,JZ)\\ & -(\nabla_V\Phi)(Z,Y)Q(X,JW) - (\nabla_V\Phi)(W,X)Q(Y,JZ)\,.\end{aligned} \tag{12.10}$$

Лема 12.1. *Нека M е $2n$-мерно ($n \geq 3$) почти Келерово многообразие с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина. Ковариантната производна ∇Q*

има вида:

$$
\begin{aligned}
2(n+1)(2n-1)(\nabla_V Q)(X,JY) &= (2n+3)(Q(Y,(\nabla_X J)V) \\
&-Q(X,(\nabla_Y J)V) + (4n+3)Q(V,(\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X) \\
&-Q(Y,(\nabla_V J)X) - (4n^2+2n-3)Q(X,(\nabla_V J)Y) \\
&+g(X,JY)\{2n\sum_{i=1}^{2n} Q(JE_i,(\nabla_V J)E_i) + \frac{2n-1}{6}V(\tau(R))\} \\
&+g(X,JV)\{\frac{4n-1}{2}\sum_{i=1}^{2n} Q(JE_i,(\nabla_Y J)E_i) + \frac{2n-1}{6}Y(\tau(R))\} \\
&-g(Y,JV)\{\frac{4n-1}{2}\sum_{i=1}^{2n} Q(JE_i,(\nabla_X J)E_i) + \frac{2n-1}{6}X(\tau(R))\} \\
&+\frac{1}{3}(n+1)(\tau(R)-2(2n-1)^2\nu)(\nabla_V \Phi)(X,Y)\,,
\end{aligned}
$$

където $\{E_1,...,E_{2n}\}$ *е локална ортонормирана база на* $\mathfrak{X}(M)$.

Доказателство. Съгласно второто тъждество на Бианки е в сила:

$$\underset{(V,X,Y)}{\sigma}\sum_{i=1}^{2n}(\nabla_V R)(X,Y,E_i,JE_i) = 0\,,$$

където $\underset{(V,X,Y)}{\sigma}$ означава циклична сума по V, X, Y. Последното, комбинирано с (12.10), (12.1) и (12.5), влече:

$$
\begin{aligned}
2(n+1)\underset{(V,X,Y)}{\sigma}(\nabla_V Q)(X,JY) &= \underset{(V,X,Y)}{\sigma}\{Q(Y,(\nabla_V J)X) \\
&-(2n+3)Q(X,(\nabla_V J)Y) + g(JX,Y)[\frac{1}{6}V(\tau(R)) \\
&+\sum_{i=1}^{2n} Q(JE_i,(\nabla_V J)E_i)]\}\,.
\end{aligned}
\tag{12.11}
$$

От друга страна, от второто тъждество на Бианки лесно следва

$$\sum_{i,q=1}^{2n}\{2(\nabla_{E_i} R)(V,E_q,JE_i,JE_q) - (\nabla_V R)(E_i,E_q,JE_i,JE_q)\} = 0\,,$$

а оттук, (12.10), (12.6) и (12.8) намираме:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n}(\nabla_{E_i}Q)(V,E_i) = \frac{4n+1}{4(n+1)}\sum_{i=1}^{2n}Q(JE_i,(\nabla_V J)E_i)\\ +\frac{n}{6(n+1)}V(\tau(R))\,.\end{aligned} \tag{12.12}$$

От последната формула, (12.5), (12.7), (12.2) и равенството

$$\sum_{i=1}^{2n}\{(\nabla_V R)(E_i,JE_i,X,Y)+2(\nabla_{E_i}R)(JE_i,V,X,Y)\}=0$$

извличаме

$$\begin{aligned}2n(\nabla_V Q)(X,JY)+(\nabla_X Q)(Y,JV)+(\nabla_Y Q)(V,JX) = 2Q(V,(\nabla_X J)Y)\\ -3Q(V,(\nabla_Y J)X)-2nQ(X,(\nabla_V J)Y)-Q(X,(\nabla_Y J)V)\\ +g(X,JY)\Big\{\frac{2n-1}{2(n+1)}\sum_{i=1}^{2n}Q(JE_i,(\nabla_V J)E_i)+\frac{n-1}{6(n+1)}V(\tau(R))\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}+g(V,JY)\Big\{\frac{4n+1}{4(n+1)}\sum_{i=1}^{2n}Q(JE_i,(\nabla_X J)E_i)+\frac{n}{6(n+1)}X(\tau(R))\Big\}\\ -g(V,JX)\Big\{\frac{4n+1}{4(n+1)}\sum_{i=1}^{2n}Q(JE_i,(\nabla_Y J)E_i)+\frac{n}{6(n+1)}Y(\tau(R))\Big\}\\ +\frac{1}{6}(\tau(R)-2(2n-1)^2\nu)(\nabla_V\Phi)(X,Y)\,.\end{aligned}$$

Като комбинираме последното с (12.11), получаваме твърдението на лемата. □

Лема 12.2. *При предположенията на Лема 12.1 е в сила:*

$$\sum_{i=1}^{2n}Q((JE_i,(\nabla_V J)E_i)=0\,.$$

Д о к а з а т е л с т в о. От второто тъждество на Бианки и (12.9) следва

$$V(\tau(R))=2\sum_{i=1}^{2n}(\nabla_{E_i}S)(V,E_i)=6\sum_{i=1}^{2n}\{(\nabla_{E_i}Q)(V,E_i)+(\nabla_{E_i}Q)(E_i,V)\}\,.$$

От друга страна Лема 1, (12.1), (12.2), (12.8), (12.12) влекат

$$\sum_{i=1}^{2n}\{(\nabla_{E_i}Q)(V,E_i)+(\nabla_{E_i}Q)(E_i,V)\}=\frac{1}{6}V(\tau(R))+\frac{n-2}{2n-1}\sum_{i=1}^{2n}Q(JE_i,(\nabla_V J)E_i)\,,$$

откъдето получаваме твърдението. □

Лема 12.3. *При предположенията на Лема 12.1 е в сила:*

$$\begin{aligned}4(2n-3)(Q(X,(\nabla_Y J)W)-Q(Y,(\nabla_X J)W)\\ +4n(Q(X,(\nabla_W J)Y)-Q(Y,(\nabla_W J)X))\\ -4(n-3)Q(W,(\nabla_X J)Y-(\nabla_Y J)X)\\ +\tau(R)(\nabla_W\Phi)(X,Y)=0\,.\end{aligned}$$

Доказателство. От леми 2.1 и 2.2, формула (12.5) и равенството:

$$\sum_{i=1}^{2n}\{(\nabla_{e_i}R)(X,Y,e_i,W)+(\nabla_Y R)(e_i,X,e_i,W)-(\nabla_X R)(e_i,Y,e_i,W)\}=0$$

следва $P=0$, където P е тензорът

$$\begin{aligned}P(W,X,Y)=4(2n^2-3)\{Q(X,(\nabla_Y J)W)-Q(Y,(\nabla_X J)W)\}\\ -4n\{Q((\nabla_Y J)W,X)-Q((\nabla_X J)W,Y)\}\\ +2(2n^2+3n+3)\{Q(X,(\nabla_W J)Y)-Q(Y,(\nabla_W J)X)\}\\ -2(n+3)\{Q((\nabla_W J)Y,X)-Q((\nabla_W J)X,Y)\}\\ +2(n-3)\{Q(W,(\nabla_X J)Y-(\nabla_Y J)X)-(2n+3)Q(\nabla_X J)Y\\ -(\nabla_Y J)X,W)\}+(n+1)\tau(R)(\nabla_W\Phi)(X,Y)\,.\end{aligned}$$

Оттук, като използваме (12.2) и (12.4) установяваме, че равенствата:

$$P(W,X,Y)-P(W,JX,JY)-P(JW,JX,Y)-P(JW,X,JY)=0\,,$$

$$P(W,X,Y)-P(W,JX,JY)+P(JW,JX,Y)+P(JW,X,JY)=0\,,$$

са еквивалентни съответно на:

$$
\begin{aligned}
&2(n-3)\big\{Q(W,(\nabla_X J)Y-(\nabla_Y J)X)\\
&\qquad+Q((\nabla_X J)Y-(\nabla_Y J)X,W)\big\}\\
&-2(2n-3)\big\{Q(X,(\nabla_Y J)W)+Q((\nabla_Y J)W,X)\\
&\qquad-Q(Y,(\nabla_X J)W)-Q((\nabla_X J)W,Y)\big\}\\
&-2n\big\{Q(X,(\nabla_W J)Y)+Q((\nabla_W J)Y,X)\\
&\qquad-Q(Y,(\nabla_W J)X)-Q((\nabla_W J)X,Y)\big\}\\
&-\tau(R)(\nabla_W\Phi)(X,Y)=0\,,
\end{aligned}
\tag{12.13}
$$

$$
(n-3)\big\{Q(W,(\nabla_Y J)X-(\nabla_X J)Y)-Q((\nabla_Y J)X-(\nabla_X J)Y,W)\big\}=0\,.
\tag{12.14}
$$

При $n=3$ твърдението на лемата следва от (12.13) и $P=0$. При $n>3$, от (12.14) получаваме още следното равенство:

$$
\begin{aligned}
Q((\nabla_W J)X,Y)-Q((\nabla_W J)Y,X)&=Q((\nabla_X J)W,Y)\\
&-Q((\nabla_Y J)W,X)+Q(Y,(\nabla_W J)X-(\nabla_X J)W)\\
&-Q(X,(\nabla_W J)Y-(\nabla_Y J)W)\,.
\end{aligned}
$$

Като приложим последното и (12.14) към (12.13), намираме:

$$
\begin{aligned}
&6(n-1)\{Q((\nabla_X J)W,Y)-Q((\nabla_Y J)W,X)\}\\
&=2(n-3)\{Q(X,(\nabla_Y J)W)-Q(Y,(\nabla_X J)W)\}\\
&+4n\{Q(X,(\nabla_W J)Y)-Q(Y,(\nabla_W J)X)\}\\
&-4(n-3)Q(W,(\nabla_X J)Y-(\nabla_Y J)X)+\tau(R)(\nabla_W\Phi)(X,Y)\,.
\end{aligned}
$$

От друга страна от последните три равенства получаваме

$$\begin{aligned}P(W,X,Y) = \; & \frac{n(n+1)}{n-1}\big\{4(2n-3)(Q(X,(\nabla_Y J)W) - Q(Y,(\nabla_X J)W))\\ & +4n(Q(X,(\nabla_W J)Y) - Q(Y,(\nabla_W J)X))\\ & -4(n-3)Q(W,(\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X)\\ & +\tau(R)(\nabla_W \Phi)(X,Y)\big\}\,.\end{aligned}$$

Оттук и $P = 0$ твърдението следва директно. □

Лема 12.4. *При предположенията на Лема 12.1, ако $n \geq 4$, е в сила:*

$$Q(X,(\nabla_Y J)V) \quad -Q((\nabla_Y J)V,X) = 0\,.$$

Доказателство. Дефинираме тензорни полета A и T от тип (0,3) с:

$$A(V,X,Y) = Q(V,(\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X)\,,$$

$$6\,T(V,X,Y) = \underset{(V,X,Y)}{\sigma}\big(A(V,X,Y) - A(JV,JX,Y)\big)\,.$$

Директно се проверява, че те имат свойствата:

$$A(V,X,Y) = -A(V,Y,X) = -A(V,JX,JY)\,,$$

$$T(V,X,Y) + T(JV,JX,Y) = 0\,. \tag{12.15}$$

Поради $n \geq 4$, като приложим последователно (12.14) и Лема 12.3, получаваме:

$$\begin{aligned}3T(V,X,Y) = \; & \underset{(V,X,Y)}{\sigma}(Q(V,(\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X)\\ = \; & \frac{1}{n}\big\{3Q(V,(\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X)\\ & +3(n-1)(Q(X,(\nabla_Y J)V)\\ & -Q(Y,(\nabla_X J)V) + \frac{1}{4}\tau(R)(\nabla_V \Phi)(X,Y)\big\}\,.\end{aligned}$$

Оттук твърдението следва с използване на (12.2), (12.4), (12.14), (12.15). □

Основното твърдение в тази секция е следната теорема, показваща че не съществуват същински почти Келерови многообразия с постоянна антихоломорфна секционна кривина и размерност $2n$, $n \geq 4$.

Теорема 12.5. *(Фалчители, Фаринола, Касабов [10]) Нека M е свързано $2n$-мерно почти Келерово многообразие, $n > 3$. Ако M е с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина, то е Келерово многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина.*

Доказателство. От второто тъждество на Бианки лесно следва

$$
\begin{aligned}
&\underset{(V,X,Y)}{\sigma} \{(\nabla_V R)(X,Y,Z,W) + (\nabla_V R)(X,Y,JZ,JW)\} \\
&+\underset{(V,JX,JY)}{\sigma}\{(\nabla_V R)(JX,JY,Z,W) + (\nabla_V R)(JX,JY,JZ,JU)\} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{12.16}
$$

откъдето с използване на (12.10) получаваме израз, съдържащ събираеми, зависещи от $g \otimes (\nabla Q + Q(.,\nabla J))$, $\nabla \Phi \otimes Q$, $d\nu \otimes \pi_1$. Да забележим, че тъй като (g, J) е почти Келерова структура, само антисиметричната компонента на Q, т.е. $S(R - \overline{R})$ остава от блока събираеми от вида $\nabla\Phi \otimes Q$. От друга страна поради Теорема 10.3 антихоломорфната кривина е константа, т.е. $d\nu = 0$. Така след дълго, но не трудно пресмятане, от равенство (12.16), с използване на Леми 12.1, 12.2, 12.4, получаваме $H = 0$, където H е тензорът от тип (0,4), дефиниран с

$$
\begin{aligned}
H(V,X,Y,Z,W) = {} & S^*(R - L_3R)(X,Z)(\nabla_W \Phi)(JY,V) \\
& -S^*(R - L_3R)(Y,Z)(\nabla_W \Phi)(JX,V) \\
& -S^*(R - L_3R)(JX,Z)(\nabla_W \Phi)(Y,V) \\
& +S^*(R - L_3R)(JY,Z)(\nabla_W \Phi)(X,V) \\
& -S^*(R - L_3R)(X,W)(\nabla_Z \Phi)(JY,V) \\
& +S^*(R - L_3R)(Y,W)(\nabla_Z \Phi)(JX,V) \\
& +S^*(R - L_3R)(JX,W)(\nabla_Z \Phi)(Y,V) \\
& -S^*(R - L_3R)(JY,W)(\nabla_Z \Phi)(X,V)\,.
\end{aligned}
$$

Оттук нула е и тензорът G, дефиниран с:

$$\begin{aligned} G(V,X,Y,Z,W) = 2(H(V,X,Y,Z,W) + H(V,Z,W,X,Y)) \\ -H(V,Y,Z,X,W) - H(V,X,W,Y,Z) \\ -H(V,Z,X,Y,W) - H(V,Y,W,Z,X)\,. \end{aligned}$$

Като комбинираме равенствата

$$G(V,X,Y,Z,W) = 0 \qquad G(V,JX,JY,Z,W) = 0 \qquad G(JV,X,Y,Z,JW) = 0$$

и използваме (12.2), получаваме

$$\begin{aligned} & S^*(R - L_3R)(X,Z)(\nabla_V\Phi)(JY,W) \\ & -S^*(R - L_3R)(Y,Z)(\nabla_V\Phi)(JX,W) \\ & -S^*(R - L_3R)(JX,Z)(\nabla_V\Phi)(Y,W) \\ & +S^*(R - L_3R)(JY,Z)(\nabla_V\Phi)(X,W) = 0\,. \end{aligned} \tag{12.17}$$

Ще покажем, че оттук следва $\nabla J = 0$, т.е. че многообразието е Келерово. Наистина да допуснем, че $\nabla J \neq 0$ и да вземем тензорни полета Y, V, такива че $(\nabla_V J)Y$ не се анулира в отворено множество U.

В (3.4) вземаме $W = Y$, $X = (\nabla_V J)Y$ и получаваме

$$S^*(R - L_3R)(JY,Z) = 0 \qquad S^*(R - L_3R)(Y,Z) = -S^*(R - L_3R)(JY,JZ) = 0$$

за произволно векторно поле Z над U. Оттук (12.17) се редуцира до

$$S^*(R - L_3R)(X,Z)(\nabla_V\Phi)(JY,W) - S^*(R - L_3R)(JX,Z)(\nabla_V\Phi)(Y,W) = 0\,,$$

или еквивалентно до

$$S^*(R - L_3R)(X,Z)J((\nabla_V J)Y) + S^*(R - L_3R)(JX,Z)((\nabla_V J)Y) = 0\,.$$

Оттук следва $S^*(R - L_3R) = 0$. Сега от (12.9) получаваме, че тензорът Q е хибриден, а от това и (12.3) следва, че U е AH_3-многообразие. Съгласно Теорема 11.1 U е с постоянна секционна кривина или Келерово многообразие с постоянна холоморфна секционна кривина. Първото е изключено, защото както вече споменахме, не съществуват не-Келерови почти Келерови многообразия с размерност ≥ 4 и постоянна секционна кривина [42]. Второто също е изключено, защото по предположение M не е Келерово. Полученото противоречие доказва теоремата. $\square$

13 Ермитови многообразия с постоянна антихоломорфна секционна кривина

В тази последна секция ще се занимаем с Ермитови многообразия с постоянна антихоломорфна кривина. В 4-мерния случай този въпрос е третиран в [3] и там е дадена пълна класификация на 4-мерните компактни Ермитови повърхнини с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина, като е изследвана връзката на автодуалните многообразия и тези с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина. Подобни резултати са получени в [43], където е доказано че едно 4-мерно почти Ермитово многообразие е с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина тогава и само тогава, когато е автодуално с хибриден тензор на Ричи и $R(Z_1, Z_2, Z_2, Z_1) = 0$, при $Z_i = e_i - iJe_i$, където $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2\}$ е произволен ортонормиран базис на допирателно пространство. Тъй като последното условие е в сила в Ермитовия случай [24], оттук следва цитираният резултат от [3]. Но в [43] няма пример на не-Ермитово мнообразие, изпълняващо това условие.

Тук ще разглеждаме Ермитови многообразия с размерност $2n \geq 6$. Да припомним, че M е Ермитово, когато над него е изпълнено тъждествено

$$(\nabla_x J)y = (\nabla_{Jx} J)Jy \qquad \text{или} \qquad (\nabla_{Jx} J)y = J(\nabla_x J)y\,. \tag{13.1}$$

Ще използваме ковариантната производна на Келеровата форма:

$$F(x, y, z) = g((\nabla_x J)y, z)\ .$$

От свойствата на почти комплекната структура следва, че за произволно почти Ермитово многообразие тя има свойствата

$$F(X, Y, Z) = -F(X, Z, Y)\ , \qquad F(X, JY, JZ) = -F(X, Y, Z)\ . \tag{13.2}$$

Веднага се вижда, че дефиницията (13.1) на Ермитово многообразие е еквивалентна с допълнителното изискване

$$F(JX, Y, Z) = -F(X, JY, Z) \ . \tag{13.3}$$

Следата на този тензор F определя формата на Ли θ на многообразието по следния начин:

$$\theta(X) = -\sum_{i=1}^{2n} F(e_i, JX, e_i) \ .$$

В тази секция отново ще работим с комплексификацията $(T_pM)^{\mathbb{C}}$ на допиртелното пространство T_pM в точка $p \in M$.

Нека $\{e_1, Je_1, ..., e_n, Je_n\}$ е ортонормиран базис на T_pM. Означаваме

$$Z_\alpha = \frac{e_\alpha - iJe_\alpha}{2} \ , \qquad Z_{\bar{\alpha}} = \frac{e_\alpha + iJe_\alpha}{2}$$

за $\alpha = 1, ..., n$. Тогава

$$\{Z_1, ..., Z_n\} \ , \qquad \text{съответно} \qquad \{Z_{\bar{1}}, ..., Z_{\bar{n}}\}$$

е базис на $(T_pM)^{1,0}$, съотв. $(T_pM)^{0,1}$. Да забележим, че ако g означава и разширението на метричния тензор до $(T_pM)^{\mathbb{C}}$, то

$$g(Z_\alpha, Z_\beta) = 0 \ , \qquad g(Z_{\bar{\alpha}}, Z_{\bar{\beta}}) = 0 \ , \qquad g(Z_\alpha, Z_{\bar{\beta}}) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \ . \tag{13.4}$$

Поради тези свойства базис от вида $\{Z_\alpha, Z_{\bar{\alpha}} \ , \ \alpha = 1, ..., n\}$ ще наричаме *ортогонален комплексен базис.*

За произволен тензор T ще използваме компонентите му $T_{\alpha...} = T(Z_\alpha, ...)$, $T_{\bar{\alpha}...} = T(Z_{\bar{\alpha}}, ...)$ спрямо горния базис.

Тъй като в тази секция ще работим с компонентите на тензорите, ще използваме и т.н. *Айнщайново сумиране*:

$$P^{...}_{...\sigma...} Q^{...\sigma...}_{...} = \sum_{\sigma=1}^{n} P^{...}_{...\sigma...} Q^{...\sigma...}_{...} \ .$$

Да отбележим, че поради $J^2 = -id$ и (13.4) са в сила

$$J^\sigma_\alpha J^\beta_\sigma = -\delta^\beta_\alpha \ , \qquad g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0 \ , \qquad g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha \ .$$

Ще започнем със следната

Лема 13.1. *Нека M е Ермитово многообразие. Ако $(\nabla_{\overline{Z}}J)Z = 0$ за всеки вектор $Z \in (T_pM)^{1,0}$, то M е Келерово в p, т.е. $\nabla J = 0$ в p.*

Доказателство. Нека $Z = X - iJX$. Тогава $\overline{Z} = X + iJX$ и

$$(\nabla_{\overline{Z}}J)Z = (\nabla_X J)X + (\nabla_{JX}J)JX + i\big((\nabla_{JX}J)X - (\nabla_X J)JX\big) \ .$$

От $(\nabla_{\overline{Z}}J)Z = 0$ получаваме $(\nabla_X J)X + (\nabla_{JX}J)JX = 0$ и тъй като M е Ермитово, оттук следва $(\nabla_X J)X = 0$, т.е. M е приблизително Келерово в p. Но M е Ермитово и следователно $(\nabla J)_p = 0$. □

Нека сега M е свързано и с точково постоянна секционна кривина $\nu(p)$. Съгласно Теорема 10.1 ν е константа, а съгласно Следствие 6.7 тензорът на кривина на M има вида

$$R = \frac{1}{2(n+1)}\psi(S^*) + \nu\pi_1 - \frac{\tau^* + 2(n+1)\nu}{2(n+1)(2n+1)}\pi_2 \ . \tag{13.5}$$

Въвеждаме тензора

$$Q = \frac{1}{2(n+1)}\, S^* - \frac{\tau^* + 2(n+1)\nu}{4(n+1)(2n+1)}\, g\,,$$

който има свойството

$$Q(JX, JY) = Q(Y, X) \ , \tag{13.6}$$

защото това свойство имат тензорите S^* и g. Тогава условието за постоянна антихоломорфна секционна кривина (13.5) можем да запишем така:

$$R = \Psi(Q) + \nu\,\pi_1. \tag{13.7}$$

Преди да формулираме и основния резултат в тази секция ще докажем следното твърдение:

Теорема 13.2. *(Ганчев-Касабов [17]) Нека M е $2n$-мерно Ермитово многообразие с постоянна антихоломорфна секционна кривина, $n > 2$. Тогава всяка не-Келерова точка на M има околност, в която M е с постоянна секционна кривина.*

Доказателство. Нека p_0 е точка на M в която $F \neq 0$. Разглеждаме околност U на p_0, такава че $F \neq 0$ във всяка точка на U. Ще покажем, че M е с постоянна секционна кривина в U.

За произволна точка $p \in U$, да вземем ортогонален комплексен базис $\{Z_\alpha, Z_{\bar\alpha} \; : \alpha = 1, ..., n\}$ в точката p.

Свойството (13.6) на тензора Q влече

$$Q_{\alpha\bar\beta} = Q_{\bar\beta\alpha}, \qquad Q_{\alpha\beta} = -Q_{\beta\alpha} \,. \tag{13.8}$$

Като вземем предвид свойството (13.3) на ковариантната производна на комплексната структура и симетрията (13.6) на тензора Q, пресмятаме

$$(\nabla_X Q)(JY, JZ) = (\nabla_X Q)(Z, Y) - Q((\nabla_X J)Y, JZ) - Q(JY, (\nabla_X J)Z) \tag{13.9}$$

за произволни $X, Y, Z \in T_pM$.

Тъй като тензорът F има симетриите (13.2) и (13.3), то неговите съществени компоненти (които евентуално не са нули) по отношение на ортогоналния комплексен базис $\{Z_\alpha,\ Z_{\bar\alpha}\}$ са $F_{\bar\alpha\beta\gamma}$ и техните спрегнати. Тези компоненти удовлетворяват условието $F_{\bar\alpha\beta\gamma} = -F_{\bar\alpha\gamma\beta}$. Свойствата на тензора F се изразяват с компонентите на ковариантната производна ∇J на почти комплексната структура както следва:

$$\nabla_\alpha J_\beta^\gamma = \nabla_{\bar\alpha} J_\beta^\gamma = \nabla_\alpha J_\beta^{\bar\gamma} = 0. \tag{13.10}$$

От равенства (13.9) и (13.10) получаваме

$$\nabla_\alpha Q_{\bar\gamma\beta} = \nabla_\alpha Q_{\beta\bar\gamma} + i\nabla_\alpha J_{\bar\gamma}^\sigma Q_{\beta\sigma} \,, \tag{13.11}$$

$$\nabla_\alpha Q_{\beta\gamma} = -\nabla_\alpha Q_{\gamma\beta}, \quad (\text{в частност} \quad \nabla_\alpha Q_{\beta\beta} = 0) \,, \tag{13.12}$$

$$\nabla_{\bar\alpha} Q_{\beta\beta} = i\nabla_{\bar\alpha} J_\beta^{\bar\sigma} Q_{\bar\sigma\beta} \,. \tag{13.13}$$

Първо ще докажем следното твърдение:

Лема 13.3. *Нека* $Z, W \in T_p^{1,0}M$ *и* $g(Z, \bar W) = 0$. *Ако* $F(\bar Z, Z, W) \neq 0$, *то* $Q(Z, W) = 0$.

Доказателство. Тъй като $g(Z, \bar W) = 0$, можем да построим ортогонален комплексен базис $\{Z_\alpha, Z_{\bar\alpha}\ \alpha = 1, ..., n\}$, така че векторите Z и W да са колинеарни на Z_α и Z_β, съответно, за някои $\alpha \neq \beta$.

Като приложим второто тъждество на Бианки

$$\nabla_\alpha R_{\beta\gamma\beta\bar{\gamma}} + \nabla_\beta R_{\gamma\alpha\beta\bar{\gamma}} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\beta\bar{\gamma}} = 0,$$

намираме

$$\nabla_\beta Q_{\alpha\beta} = 0. \tag{13.14}$$

Нататък прилагаме второто тъждество на Бианки във вида

$$\nabla_{\bar{\alpha}} R_{\alpha\beta\alpha\beta} + \nabla_\alpha R_{\beta\bar{\alpha}\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\bar{\alpha}\alpha\alpha\beta} = 0$$

и като вземем предвид 13.14, получаваме

$$F_{\bar{\alpha}\alpha\beta} Q_{\alpha\beta} = 0\ . \tag{13.15}$$

Тъй като по построение $Z_\alpha \parallel Z$, $Z_\beta \parallel W$, а по условията на лемата $F(\bar{Z}, Z, W) \neq 0$, то $F_{\bar{\alpha}\alpha\beta} \neq 0$. Сега от 13.15 следва $Q_{\alpha\beta} = 0$. Това доказва Лема 13.3. □

Нататък имаме

Лема 13.4. *Тензорът Q е симетричен във всяка точка $p \in U$.*

Доказателство. Тъй като тензорът F не е нулев в точката p, то съгласно Лема 13.1 съществуват индекси $\alpha \neq \beta$, такива че $F_{\bar{\alpha}\alpha\beta} \neq 0$. Оттук съгласно Лема 13.3 следва $Q_{\alpha\beta} = 0$.

Да вземем прозволен индекс $\gamma \neq \alpha, \beta$. Тъй като $F_{\bar{\alpha}\alpha\beta} \neq 0$, то комплексната функция

$$w(t) = F(Z_{\bar{\alpha}}, Z_\alpha, Z_\beta + tZ_\gamma)$$

е различна от нула за всяко достатъчно малко реално число t. Поради последното от Лема 13.3 следва

$$Q(Z_\alpha, Z_\beta + tZ_\gamma) = 0$$

за всяко достатъчно малко t. Оттук $Q(Z_\alpha, Z_\gamma) = 0$, т.е. $Q_{\alpha\gamma} = 0$.

Аналогично, неравенството

$$F(Z_\alpha + tZ_\gamma, Z_\alpha + tZ_\gamma, Z_\beta) \neq 0$$

за всяко достатъчно малко t и Лема 13.3 влекат $Q(Z_\alpha + tZ_\gamma, Z_\beta) = 0$ и оттук $Q_{\gamma\beta} = 0$. С това получихме

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\gamma} = Q_{\beta\gamma} = 0.$$

Ако $\dim M > 6$, нека $\delta \neq \alpha, \beta, \gamma$. Както по-горе, получаваме

$$Q_{\alpha\delta} = Q_{\alpha\delta} = Q_{\beta\delta} = 0\ .$$

От друга страна неравенството

$$F(Z_{\bar\alpha} + tZ_{\bar\gamma}, Z_\alpha + tZ_\gamma, Z_\beta + tZ_\delta) \neq 0\ ,$$

което също е в сила за всяко достатъчно малко реално t, влече $Q_{\gamma\delta} = 0$. Следователно $Q_{\lambda\mu} = 0$ за всички $\lambda, \mu = 1, ..., n$, което доказва Лема 13.4. □

Връщаме се към доказателството на Теорема 13.2. Следващата ни цел е да се убедим, че тензорът Q е пропорционален на метричния тензор g в U. За целта е достатъчно да покажем, че

$$Q_{\lambda\bar\mu} = 0 \tag{13.16}$$

за всички различни индекси λ, μ.

Ще разгледаме следните две възможности за ненулевия тензор F:

1) Съществуват три различни индекса α, β, γ, така че $F_{\bar\gamma\alpha\beta} \neq 0$;

2) $F_{\bar\gamma\alpha\beta} = 0$ за всички различни индекси α, β, γ и за всеки ортогонален комплексен базис.

Случай 1. Прилагаме второто тъждество на Бианки във вида

$$\nabla_\alpha R_{\beta\bar\gamma\beta\bar\gamma} + \nabla_\beta R_{\bar\gamma\alpha\beta\bar\gamma} + \nabla_{\bar\gamma} R_{\alpha\beta\beta\bar\gamma} = 0,$$

и получаваме равенството $F_{\bar\gamma\alpha\beta} Q_{\beta\bar\gamma} = 0$, което влече $Q_{\beta\bar\gamma} = 0$. Оттук подобно на случая в Лема 13.4, получаваме 13.16.

Случай 2. Съгласно Лема 2.1 съществуват два различни индекса α и β така че $F_{\bar\alpha\alpha\beta} \neq 0$. Прилагайки второто тъждество на Бианки във вида

$$\nabla_\alpha R_{\bar\gamma\beta\beta\bar\alpha} + \nabla_{\bar\gamma} R_{\beta\alpha\beta\bar\alpha} + \nabla_\beta R_{\alpha\bar\gamma\beta\bar\alpha} = 0$$

и вземайки предвид равенствата $Q_{\alpha\beta} = 0$, $F_{\bar{\gamma}\alpha\beta} = 0$, получаваме

$$-\nabla_{\bar{\gamma}} Q_{\beta\beta} + iQ(Z_\beta, (\nabla_{\bar{\gamma}} J)Z_\beta) + \nabla_\beta Q_{\bar{\gamma}\beta} = 0.$$

Поради (13.16) последното равенство дава

$$\nabla_\beta Q_{\bar{\gamma}\beta} = 0. \tag{13.17}$$

Сега прилагаме второто тъждество на Бианки във вида

$$\nabla_{\bar{\alpha}} R_{\alpha\beta\beta\bar{\gamma}} + \nabla_\alpha R_{\beta\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}} + \nabla_\beta R_{\bar{\alpha}\alpha\beta\bar{\gamma}} = 0$$

и намираме

$$3iF_{\bar{\alpha}\alpha\beta} Q_{\beta\bar{\gamma}} + 2\nabla_\beta Q_{\beta\bar{\gamma}} + 2iQ(Z_\beta, (\nabla_\beta J)Z_{\bar{\gamma}}) = 0,$$

което заедно с (13.11) влече

$$3iF_{\bar{\alpha}\alpha\beta} Q_{\beta\bar{\gamma}} + 2\nabla_\beta Q_{\bar{\gamma}\beta} = 0\ .$$

От последното равенство и (13.17) намираме

$$F_{\bar{\alpha}\alpha\beta} Q_{\beta\bar{\gamma}} = 0\ .$$

Оттук $Q_{\beta\bar{\gamma}} = 0$. Като приложим отново схемата от доказателството на Лема 13.4, получаваме желаното условие (13.16).

Следователно и в двата случая 1) и 2), получихме условието (13.16), което е еквивалентно на изискването

$$Q(X, Y) = 0, \quad \text{винаги когато } X, Y \in T_pM,\ g(X, Y) = 0.$$

Оттук със стандартна процедура установяваме, че Q е пропорционален на метричния тензор g, т.е.

$$Q = \frac{\operatorname{tr} Q}{2n}\, g, \quad \operatorname{tr} Q = \frac{\tau^* - 2\,n\nu}{2(2n+1)}\,.$$

От последното равенство и (13.7) получаваме

$$R = \nu\,\pi_1 + \frac{\operatorname{tr} Q}{n}\,\pi_2.$$

Следователно U е обобщена пространствена форма и тъй като не е Келерово, то е с постоянна секционна кривина, съгласно използвания вече резултат от [50]. $\square$

Забележка. Ако почти Ермитово многообразие е с постоянна секционна кривина, т.е. тензорът му на кривина има вида $R = \nu\,\pi_1$, то за двете скаларни кривини τ и τ^* са в сила

$$\nu = \frac{\tau}{2n(2n-1)} = \frac{\tau^*}{2n} \tag{13.18}$$

и $\tau = (2n-1)\tau^*$.

Сега сме готови да формулираме и докажем основния резултат в тази секция:

Теорема 13.5. *(Ганчев-Касабов [17]) Нека M е свързано Ермитово, не-Келерово многообразие с реална размерност $2n$, $n > 2$. Ако M е с точково постоянна антихоломорфна секционна кривина, то е многообразие с постоянна секционна кривина (реална пространствена форма).*

Доказателство. Да означим с H множеството от точки на M, в които $R = \nu\,\pi_1$. Тогава H е затворено, а множеството $M \setminus H$ е отворено.

Ако $M \setminus H = \phi$, то M е с постоянна секционна кривина ν.

Нека $M \setminus H$ не е празно. Съгласно Теорема 13.2 $\nabla J = 0$ в $M \setminus H$ и тъй като M е с постоянна антихоломорфна кривина ν, то

$$R = \frac{\nu}{4}\,(\pi_1 + \pi_2) \tag{13.19}$$

в $M \setminus H$. Но множеството, в което е изпълнено (13.19) е също затворено и тъй като M е свързано, то съществува точка $p \in H$ така че (13.19) е в сила в p. Следователно $\nu = 0$ и M е плоско, което доказва твърдението. $\square$

Следващият пример показва, че за всяка четна размерност съществуват не-Келерови Ермитови многообразия с постоянна секционна кривина.

Пример. [44] Нека $M = \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ със стандартните координатна система $(x_1, ..., x_n, x_{n+1} = y_1, ..., x_{2n} = y_n)$, Евклидова метрика g и комплексна структура J. Правим конформна смяна

$$\tilde{g} = \phi^2\, g \qquad \phi = \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{2n} x_i^2}\ .$$

Тогава $(M, \tilde{g}, J)$ е с постоянна (ненулева) секционна кривина. $\square$

Накрая ще приложим Теорема 13.5 за да докажем следното твърдение за компактни Ермитови многообразия:

Следствие 13.6. *(Ганчев-Касабов [17]) Нека M е компактно не-Келерово Ермитово многообразие с размерност $2n$, $n > 2$. Ако M е с постоянна антихоломорфна секционна кривина, то е плоско HSK-многообразие.*

Доказателство. Съгласно Теорема 13.5 M е с постоянна секционна кривина ν. Както е известно, единствените сфери, върху които може да се дефинира комплексна структура, са $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^6$. От друга страна съгласно [39] върху $\mathbb{S}^6$ не може да се дефинира интегруема комплексна структура (въпреки, че може да се дефинира структура на приблизително Келерово многообразие). Оттук можем да кажем, че не съществува компактно не-Келерово Ермитово многообразие (с размерност ≥ 6) с постоянна антихоломорфна секционна кривина $\nu > 0$.

Да означим с $\delta\theta$ ко-диференциала на формата на Ли θ. В сила е следната формула [18]

$$\tau - \tau^* = 2\,\delta\theta + \|\theta\|^2 .$$

Оттук, Теорема 13.5 и 13.19 получаваме

$$\|\theta\|^2 - 4n(n-1)\nu = -2\,\delta\theta \ ,$$

откъдето

$$\int_M \{\|\theta\|^2 - 4n(n-1)\nu\}\, dv = 0 \ . \tag{13.20}$$

Следователно не съществуват компактни не-Келерови Ермитови многообразия с постоянна антихоломорфна секционна кривина $\nu < 0$. Всъщност за несъществуването на не-Келерови Ермитови реални пространствени форми от хиперболичен тип може да се види и в [19].

От друга страна, при $\nu = 0$ от (13.20) следва $\theta = 0$, т.е. M е плоско SK-многообразие и тъй като е Ермитово, то е HSK-многообразие. $\square$

Литература

[1] П. Рашевский: *Риманова геометрия и тензорный анализ.* Изд. Наука, Москва, 1967.

[2] Г. Станилов: *Докторска дисертация.* София, 1977.

[3] V. Apostolov , G. Ganchev, S. Ivanov: *Compact Hermitian Surfaces of Constant Antiholomorphic Sectional Curvatures.* Proc. Amer. Math. Soc., **125**(1997), 12, 3705-3714.

[4] M. Barros: *Classes de Chern de las NK-variedades. Geometria de las AK_2-variedades.* Tesis doctorales, Universidad de Granada, 1977.

[5] S. Bochner: *Curvature and Betti numbers II.* Ann. of Math., **50**(1949), 77-93.

[6] D. Catalano, F. Defever, R. Deszcz, M. Hotloś, Z. Olszak: *A note on almost Kähler manifolds.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **69**(1999), 59-65.

[7] B.-Y. Chen, K. Ogiue: *Some characterizations of complex space forms.* Duke Math. J., **40**(1973), 797-799.

[8] L. Eisenhart: *Symmetric tensors of the second order whose first covariant derivatives are zero.* Trans. Amer. Math. Soc., **25**(1923), 297-306.

[9] Y. Euh, J.H. Park, K. Sekigawa: *Nearly Kähler manifolds with vanishing Tricerri-Vanhecke Bochner curvature tensor.* Differential Geom. Appl., **27**(2009), no. 2, 250-256.

[10] M. Falcitelli, A. Farinola, O. Kassabov: *Almost Kähler manifolds whose antiholomorphic sectional curvature is pointwise constant.* Rend. di Mat., Ser. VII, **18**(1998), 151-166.

[11] G. Ganchev: *Characteristic of some classes of almost Hermitian manifolds.* Serdica Bulgar. Math. Publ., **4**(1978), 19-23.

[12] G. Ganchev: *Almost Hermitian manifolds similar to the complex space forms.* C. R. Acad. Bulg. Sci., **32**(1979), 1179-1182.

[13] G. Ganchev: *Almost Hermitian manifolds of constant type and vanishing generalized tensor of Bochner*. Serdica Bulgar. Math. Publ., **7**(1981), 66-75.

[14] G. Ganchev: *Conformal type and Bochner tensors for almost Hermitian manifolds.* C. R. Acad. bulg. Sci., **34**(1981), 1065-1068.

[15] G. Ganchev: *On Bochner curvature tensors in almost Hermitian manifolds.* Pliska Stud. Math. Bulgar., **9**(1987), 33-43.

[16] G. Ganchev, O. Kassabov: *Nearly Kähler manifolds of constant antiholomorphic sectional curvature.* C. R. Acad. bulg. Sci., **35**(1982), 145-147.

[17] G. Ganchev, O. Kassabov: *Hermitian manifolds of pointwise constant antiholomorphic sectional curvature.* Serdica Math. J., **33**(2007), 377-386.

[18] P. Gauduchon: *La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte.* Math. Ann., **267** (1984), 495-518.

[19] P. Gauduchon: *Complex structures on compact conformal manifolds of negative type.* Complex analysis and geometry (Trento, 1993), 201-212. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 173, Dekker, New York, 1996.

[20] A. Gray: *Vector cross products on manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc., **141**(1969), 465-504.

[21] A. Gray: *Nearly Kähler manifolds.* J. Diff. Geom., **4**(1970), 283-309.

[22] A. Gray: *Classification des variétés approximativement kähleriennes de courbure sectionnelle constante.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **279**(1974), 797-800.

[23] A. Gray: *The structure of nearly Kähler manifolds.* Math. Ann., **223**(1976), 233-248.

[24] A. Gray: *Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds.* Tôhoku Math. J., **28**(1976), 601-612.

[25] A. Gray, L. Hervella: *The sixteen classes of almost Hermitian manifold and their linear invariants.* Ann. Mat. Pura Appl. (4), **123**(1980), 35-58.

[26] A. Gray, L. Vanhecke: *Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature.* Čas. Pěst. Mat., **104**(1979), 170-179.

[27] O. Kassabov: *Sur le théorème de F. Schur pour une variété presque Hermitienne.* C. R. Acad. Bulgare Sci. 35(1982), 905-907.

[28] O. Kassabov: *Almost Hermitian manifolds with vanishing generalized Bochner curvature tensor.* Serdica Bulgar. Math. Publ., **9**(1983), 96-101.

[29] O. Kassabov: *Four-dimensional conformal flat* QK_3*-manifolds.* C. R. Acad. Bulgare Sci., 36(1983), 1289-1290.

[30] O. Kassabov: *Conformal flat* AK_2*-manifolds.* Pliska Stud. Math. Bulgar., **9**(1987), 12-16.

[31] O. Kassabov: AH_3*-manifolds of constant antiholomorphic sectional curvature.* Pliska Stud. Math. Bulgar., **9**(1987), 52-57.

[32] O. Kassabov: *Schur's theorem for almost Hermitian manifolds.* C. R. Acad. Bulg. Sci., **54**(2001), 15-18.

[33] O. Kassabov: *Almost Hermitian manifolds with vanishing Bochner curvature tensor.* C. R. Acad. Bulg. Sci., **63**(2010), 29-34.

[34] O. Kassabov: *On Bochner flat almost Kähler manifolds.* ArXiv 1501.01553.

[35] O. Kassabov: *Characteristics of almost Hermitian manifolds with vanishing Bochner curvature tensor.* Mechanics, Transport, Communications, 12(2014) (2), VII, 1-7.

[36] S. Kobayashi and K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*, Vol. I, John Wiley and Sons, New York, 1963.

[37] S. Kobayashi and K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*, Vol. II, John Wiley and Sons, New York, 1969.

[38] R. S. Kulkarni: *Curvature structure and conformal transformations.* Bull. Amer. Math. Soc., **75**(1969), 91-94.

[39] C. Le Brun: *Orthogonal complex structures on S^6.* Proc. Amer. Math. Soc., **101** (1987), 136-138.

[40] M. Matsumoto, S. Tanno: *Kählerian spaces with parallel or vanishing Bochner curvature tensor.* Tensor (N.S.), **27**, 1973, 291-294.

[41] A. M. Naveira, L. M. Hervella. *Schur's theorem for nearly Kähler manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc., **49**(1975), 421-425.

[42] T. Oguro, K. Sekigawa: *Non-existence of almost Kähler structure on hyperbolic spaces of dimension $2n(\geq 4)$.* Math. Ann., **300**(1994), 317-329.

[43] T. Sato: *Almost Hermitian 4-manifolds of pointwise constant anti-holomorphic sectional curvature.* J. Geom., **77**(2003), 171-183.

[44] T. Sato: *Examples of Hermitian manifolds with pointwise constant anti-holomorphic sectional curvature.* J. Geom., **80**(2004), 196-208.

[45] J. A. Schouten: *Ricci-calculus.* Springer-Verlag, Berlin and New York, 1954.

[46] G. Stanilov: *On Kähler manidolds with vanishing Bochner curvature tensor.* Pure Appl. Math. Sci., **5**(1977), 7-11.

[47] G. Stanilov, O. Kassabov: *The axiom of θ-holomorphic 2-planes in the almost Hermitian geometry.* Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Méc., 75(1981), 53-56.

[48] S. Tachibana: *On the Bochner curvature tensor.* Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., **18**(1967), 15-19.

[49] S. Tachibana, R. Liu: *Notes on Kählerian metrics with vanishing Bochner curvature tensor.* Kōdai Math. Sem. Rep., **22**(1970), 313-321.

[50] Fr. Tricerri, L. Vanhecke: *Curvature tensors on almost Hermitian manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc., **267**(1981), 365-398.

[51] L. Vanhecke, F. Bouten: *Constant type for almost Hermitian manifolds.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, **20(68)**(1976), 415-422.

[52] L. Vanhecke, K. Yano: *Almost Hermitian manifolds and the Bochner curvature tensor.* Kodai Math. Sem. Rep., **29**(1977), 10-21.

[53] Y. Watanabe, K. Takamatsu: *On a K-space of constant holomorphic sectional curvature.* Ködai Math. Sem. Rep., **25**(1972), 351-354.